Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{V} = \left(\binom{1}{-1}, \binom{2}{3}\right)$ und $\mathcal{W} = \left(\binom{4}{2}, \binom{-2}{3}\right)$ $\mathbb{Q}$-Basen von $\mathbb{Q}^2$ sind.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $v = 3 \cdot \binom{1}{-1} + 2 \cdot \binom{2}{3}$ bzgl. der Basis $\mathcal{W}$.

<u>Beweis</u>:

Wegen $\dim(\mathbb{Q}^2) = 2$ genügt es für a) zu zeigen, dass jeweils $\binom{1}{-1}, \binom{2}{3}$ und $\binom{4}{2}, \binom{-2}{3}$ linear unabhängig sind. Dies folgt aber aus

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \neq 0 \quad \text{ und } \quad \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 16 \neq 0.$$

Also sind $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ Basen von $\mathbb{Q}^2$.
Um b) zu zeigen, löse ich folgendes Gleichungssystem:

$$v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}.$$

Mit $v = 3 \cdot \binom{1}{-1} + 2 \cdot \binom{2}{3} = \binom{7}{3}$ ergibt sich also

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & 1 \end{array}\right)$$

Damit ist $\lambda_2 = -\frac{1}{8}$ und $\lambda_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lambda_2 = \frac{27}{16}$.
Es gilt also

$$v = \frac{27}{16} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 2:
Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f((1,0,1)) = (0,b,1),\ f((0,1,1)) = (a,2b,0),\ f((1,1,0)) = (3,0,2c)$ und $f((3,2,1)) = (a+1,4,3c)$.

a) Für welche $a,b,c \in \mathbb{R}$ ist f $\mathbb{R}$-linear?
Eine lineare Abb. wird eindeutig definiert durch die Bilder einer Basis des Ausgangsraumes. Hat man nur Bilder von linear unabhängigen Vektoren, so kann man f vollständig definieren, in dem man diese Vektoren zu einer Basis ergänzt und Bilder für die ergänzenden Vektoren definiert.

Hier: $v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,1,0)$ sind linear unabhängig:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Durch ihre Bilder ist f eindeutig bestimmt.
Weiter ist $v_4 = (3,2,1)$ aus v_1, v_2, v_3 linear kombinierbar. Diese Linearkombination muss für die Bilder auch unter f erhalten bleiben, damit f linear ist.
Es gilt:

$$(3,2,1) = 1 \cdot (1,0,1) + 2 \cdot (1,1,0).$$

Daher muss auch gelten:

$$\begin{aligned} f((3,2,1)) &= f((1,0,1)) + 2 \cdot f((1,1,0)) \\ \Longrightarrow (a+1,4,3c) &= (0,b,1) + 2 \cdot (3,0,2c). \end{aligned}$$

Aus den einzelnen Komponenten erhält man folgendes LGS:

$$\begin{aligned} a+1 &= 6 \\ 4 &= b \\ 3c &= 1+4c \end{aligned}$$

$\Longrightarrow a = 5,\ b = 4,\ c = -1$. Diese Wahl ist notwendig, damit f linear ist.
b) Zur Eindeutigkeit von f braucht man zwei Argumente:

1. Die Bilder einer Basis des $\mathbb{R}^3$ sind gegeben. Dies ist mit den Bildern von v_1, v_2, v_3 der Fall. Nach Satz 10.1 ist f damit eindeutig bestimmt.

2. Da die Bilder der Basis von den Parametern a, b, c abhängen, müssen diese eindeutig sein. Dies sind sie nach Rechnung in Teil a).

Also ist f in Teil a) eindeutig bestimmt. $\square$

Aufgabe 3:

a) Ich wähle $\mathcal{A} = (1, x, x^2, x^3)$ als Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ und $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ als Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Die zugehörige Darstellungsmatrix von δ ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) δ bildet 0 und 1 beide auf 0 ab, ist also nicht injektiv. Daher hat die Abbildung keine Linksinverse.

Rechtsinverse ist die Abbildung, die bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

hat, denn $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Anschaulich ist dies auch völlig klar... (Stichwort: Integration!):
Integriert man erst und differenziert dann wieder, so erhält man das Ausgangspolynom.
Differenziert man allerdings zuerst und integriert dann, so kommt noch eine Konstante dazu...!

Aufgabe 4:

Eine geometrische Bedingung, die zur genannten äquivalent ist, ist $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Beweis:

Wenn $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$, dann ist die Summe $E_1 + E_2$ direkt. Nach der Dimensionsformel aus der Vorlesung gilt $dim\ (E_1 \oplus E_2) = dim\ \mathbb{R}^4$, und es folgt, dass eine Basis des $\mathbb{R}^4$ in $E_1 \cup E_2$ enthalten ist.

Wenn $E_1 \cap E_2 \neq \{\vec{0}\}$, dann ist nach der Dimensionsformel $dim\ (E_1 + E_2) \leq 3$, also liegt keine Basis des $\mathbb{R}^4$ in $E_1 \cup E_2$.

Aufgabe 5

a) Man bringt die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a^3 \\ a & -1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

zunächst auf Zeilenstufenform. Addiere hierzu das $-a$-fache der ersten Zeile zur zweiten und das $-b$-fache der ersten Zeile zur dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & a^3 \\ 0 & -a^4 - 1 \\ 0 & 2 - ba^3 \end{pmatrix}$$

Der Spaltenrang dieser Matrix ist 2; es sei denn es gilt $-a^4 - 1 = 0 \wedge 2 - ba^3 = 0$. In diesem Fall ist der Rang gleich 1. Die erste Gleichung ist genau dann erfüllt ist, wenn $(a = \sqrt{i} \wedge b = -2\sqrt{i}) \vee (a = -\sqrt{i} \wedge b = 2\sqrt{i})$ ist.
Sei f die zur Matrix A gehörige lieare Abbildung.
Da der Spaltenrang einer Matrix gleich $dim\, Bild(f)$ ist, kann nach der Dimensionsformel $dim\, Kern(f) = 2 - 2 = 0$ oder $dim\, Kern(f) = 2 - 1 = 1$ sein.

b)In den reellen Zahlen ist a^4 stets ≥ 0.
Daraus folgt: $-a^4 - 1 \leq -1 < 0\, \forall a \in \mathbb{R}$.
Somit ist der Rang der Matrix immer gleich 2 und der Kern hat immer die Dimension 0.

Aufgabe 6:

Sei K ein Körper und $M \in Mat_n(K)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.
a) Es gilt $M^2 = 0$ und Rang$(M) = \frac{n}{2}$.
b) Der von den Spaltenvektoren von M erzeugte K-Untervektorraum von K^n stimmt mit der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

überein.

$a) \Rightarrow b)$: Der von den Spaltenvektoren von M erzeugte K-Untervektorraum von K^n ist gerade Bild(M). Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

ist gerade Kern(M). Zu zeigen ist also Bild(M)=Kern(M).
i) Mit der Dimensionsformel folgt aus Rang$(M) = \frac{n}{2}$:

$$\begin{array}{cccccc} & \dim(K^n) & = & \dim(\text{Bild}(M)) & + & \dim(\text{Kern}(M)) \\ \Leftrightarrow & n & = & \text{Rang}(M) & + & \dim(\text{Kern}(M)) \\ \Leftrightarrow & n & = & \frac{n}{2} & + & \dim(\text{Kern}(M)) \\ \Rightarrow & \dim(\text{Kern}(M) & = & \frac{n}{2} & & \\ \Rightarrow & \dim(\text{Bild}(M)) & = & \dim(\text{Kern}(M) & & \end{array}$$

ii) Sei $v \in$ Bild(M), dann $\exists\ u \in K^n : Mu = v$.
$\Rightarrow 0 = M^2u = M \cdot Mu = Mv$
$\Rightarrow v \in$ Kern(M), also Bild$(M)\subseteq$ Kern(M).
Da außerdem beide Mengen dieselbe Dimension haben, folgt die Behauptung.

$b) \Rightarrow a)$: i) Es gilt Bild(M)=Kern(M). Also auch dim(Bild(M)) = dim(Kern(M).
Dann gilt mit Dimensionsformel:

$$\begin{array}{cccccc} & \dim(K^n) & = & \dim(\text{Bild}(M)) & + & \dim(\text{Kern}(M)) \\ \Leftrightarrow & n & = & \text{Rang}(M) & + & \text{Rang}(M) \\ \Leftrightarrow & \text{Rang}(M) & = & \frac{n}{2} & & \end{array}$$

ii) Sei $v \in K^n$. So ist $Mv \in$Bild(M)=Kern(M).
$M \cdot Mv = 0 \overset{v\ beliebig}{\Rightarrow} M^2 = 0$.

□

Aufgabe 7:

Sei K Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung mit $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^2)$. Zu zeigen war: $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Bild}(f^2)$:

Beweis.

Mit f ist natürlich auch $f^2 = f \circ f$ eine K-lineare Abbildung als Komposition von linearen Abbildungen.
Es gelten also folgende Dimensionsformeln:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \dim_K(V) & = & \dim_K(\mathrm{Kern}(f)) + \dim_K(\mathrm{Bild(f)}) \\ (2) & \dim_K(V) & = & \dim_K(\mathrm{Kern}(f^2)) + \dim_K(\mathrm{Bild}(f^2)), \end{array}$$

also

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(f)) + \dim_K(\mathrm{Bild(f)}) = \dim_K(\mathrm{Kern}(f^2)) + \dim_K(\mathrm{Bild}(f^2)).$$

Da nach Voraussetzung $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^2)$, folgt also

$$\dim_K(\mathrm{Bild(f)}) = \dim_K(\mathrm{Bild}(f^2)).$$

Da für eine K-lineare Abbildung $f : V \to V$ stets gilt, dass $f(V) \subseteq V$, folgt auch $\mathrm{Bild}(f^2) = f^2(V) \subseteq f(V) = \mathrm{Bild}(f)$.
Zusammen mit der Dimensionsgleichheit folgt daraus $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Bild}(f^2)$.

$\square$

Aufgabe 8:

a) Z.z.: Die Menge $Mat_{ssm}(n)$ der schiefsymmetrischen, magischen Matrizen ist ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $M_n(\mathbb{Q})$.

Beweis: Als Schnitt zweier $\mathbb{Q}$-Untervektorräume (vgl. Vorlesung und Übungen) ist $Mat_{ssm}(n)$ ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $M_n(\mathbb{Q})$.

b) Bestimme die Dimension von $Mat_{sm}(4)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Behauptung: $\dim_{\mathbb{Q}}(Mat_{ssm}(4)) = 3$.

Es sei $v := (1,1,1,1)^t \in \mathbb{Q}^4$, dann gilt für eine Matrix $S \in Mat_{ssm}(4)$, deren Zeilensummen jeweils gleich $z \in \mathbb{Z}$ seien,

$$4z^2 = zv^t \cdot zv = (Sv)^t Sv = v^t(S^tS)v = v^t(-SS)v = -z^2v^tv = -4z^2 \Rightarrow z = 0.$$

Es sei $E_{ij} \in M_4(\mathbb{Q})$ die Matrix mit einer Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalten und sonst Nullen. Laut Vorlesung ist

$$B := \{b_1, \ldots, b_6\} := \{E_{12}-E_{21}, E_{13}-E_{31}, E_{14}-E_{41}, E_{23}-E_{32}, E_{24}-E_{42}, E_{34}-E_{43}\}$$

eine Basis für $Mat_{ss}(4)$, der Menge der schiefsymmetrischen Matrizen. Eine schiefsymmetrische Matrix S hat somit eine Darstellung der Art

$$S = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i b_i, \quad Sv = S\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ -\lambda_1+\lambda_4+\lambda_5\\ -\lambda_2-\lambda_4+\lambda_6\\ -\lambda_3-\lambda_5+\lambda_6\end{pmatrix}.$$

Damit ist S genau dann eine schiefsymmetrische, magische Matrix, wenn die λ_i Lösung des folgenden homogenen Gleichungssystems sind, welches hier direkt in Matrixform geschrieben und dann umgeformt wird,

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\ -1&0&0&1&1&0\\ 0&-1&0&-1&0&1\\ 0&0&-1&0&-1&-1\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&0\\ 0&1&0&1&0&-1\\ 0&0&1&0&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Wie man an dieser Normalform direkt erkennt ist der Rang der Matrix drei, damit hat der Kern dieser linearen Abbildung nach der Dimensionsformel die Dimension 6-3=3, d.h. die schiefsymmetrischen, magischen (rationalen) Matrizen $Mat_{ssm}(4) \subset M_4(\mathbb{Q})$ bilden selbst einen drei dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

$\square$

Aufgabe 9):

Erste Lösung :
$f : V \longrightarrow V$ ist ein Automorphismus, d.h. es existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \longrightarrow V$. Es folgt

$$id_V = f^{-1} \circ f = f^{-1} \circ (f^2) = f$$

Daher gilt $f - id_V = 0$. Weil die Nullabbildung nicht invertierbar ist, folgt die Behauptung.

Zweite Lösung:
Aus $f^2 = f$ folgt $0 = f^2 - f = f \circ (f - id_V)$.
Weil f ein Automorphismus ist gilt $det(f) \neq 0$.
Die Gleichung

$$0 = det(0) = det(f \circ (f - id_V)) = \underbrace{det(f)}_{\neq 0} det(f - id_V)$$

liefert $det(f - id_V) = 0$, also ist $f - id_V$ nicht invertierbar.

$\square$