

Lineare Algebra I

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (P): Von der Schwierigkeit, Frauen zu verstehen

Anne sagt: "Bettina lügt."

Bettina sagt: "Claudia lügt."

Claudia sagt: "Anne und Bettina lügen."

Wer lügt denn nun?

Aufgabe 2 (P): Kein Problem für 8-jährige Grundschüler?

Zeigen Sie die folgenden Formeln mit Hilfe von vollständiger Induktion nach n .

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ für $n \geq 1$.

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 3 (D+L): Unendliche Weiten

Die Enterprise fliegt zu Forschungszwecken zum weitgehend unbekanntem Planeten Warlög. Man weiß bisher nur, dass sich das Volk in drei Stämme unterteilt, die Xurs, welche immer die Wahrheit sagen, die Polits, notorische Lügner, und die Yzys, die lügen oder die Wahrheit sagen, je nach Lust und Laune. Captain Piccard und Lt. Com. Data beamen sich auf den Planeten und begegnen drei Einheimischen. Dem äußeren Erscheinungsbild nach zu urteilen ist jeder der drei Stämme vertreten.

Piccard: "Von welchem Stamm seid ihr?"

Der Erste sagt: "Der Dritte ist ein Polit."

Der Zweite sagt: "Der Erste ist ein Xur."

Der Dritte sagt: "Ich bin ein Yzy."

Piccard zu Data: "So kommen wir nicht weiter."

Data blickt Piccard verständnislos an: "Aber es ist doch offensichtlich, wer von welchem Stamm ist ..."

Nämlich?

Aufgabe 4 (D+L): Induktion über gevierteilte Kaninchen!

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mit vollständiger Induktion nach n .

a) Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ mit $n \neq 3$ gilt $n^2 \leq 2^n$.

b) (*) Für die durch $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ definierten *Fibonacci-Zahlen* gilt, dass f_n genau dann durch drei teilbar ist, wenn n durch vier teilbar ist.

Aufgabe 5 (D+L): Beweis durch Einschüchterung: "Das ist doch wohl trivial!"

Sei $n \geq 1$ und sei M eine Menge mit n Elementen. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mit vollständiger Induktion nach n .

a) Die Menge M besitzt genau 2^n Teilmengen.

b) Sei $1 \leq m \leq n$. Die Menge M besitzt genau $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$ Teilmengen mit jeweils m Elementen.

Aufgabe 6 (*): Spiel mir das Lied vom Tod

Zwei Cowboys treiben gemeinsam ihre x Kühe in die Stadt und verkaufen sie zu je x Dollar. Für den Erlös erwerben sie eine ungerade Anzahl von Schafen zu je 12 Dollar, und der Rest reicht gerade noch für ein Lamm. Dem Cowboy, der beim Teilen das Lamm erhält, schenkt der andere zum Ausgleich seine Mundharmonika. Was kostet die Mundharmonika?

Die folgenden Übungsblätter werden nicht mehr in der Vorlesung ausgegeben, sondern erscheinen im Internet unter <http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/~linalg/index.html>.