

Lineare Algebra I Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (P): (Automorphismus = die Verwandlung eines Käfers in einen Jaguar)

Beweisen Sie $\text{Aut}(\mathbb{F}_p) = \{\text{id}\}$ für eine Primzahl p .

Aufgabe 2 (P): (Der Student muss es wissen. Der Assistent muss wissen, wo es steht. Der Professor muss wissen, wo der Assistent ist.)

Sei R ein kommutativer Integritätsring mit Einselement. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Rechenregeln für Polynome $f, g \in R[x] \setminus \{0\}$.

- a) $\deg(f + g) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$
- b) $\text{LT}(f \cdot g) = \text{LT}(f) \cdot \text{LT}(g)$
- c) $\text{LT}(f + g) = \text{LT}(f) + \text{LT}(g)$
- d) $\text{LC}(f \cdot g) = \text{LC}(f) \cdot \text{LC}(g)$

Aufgabe 3 (D+L): (Teile und herrsche!)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimmen sie das Ergebnis der Polynomdivision von $x^n + 1$ durch $x + 1$. (Tipp: Unterscheiden Sie, ob n gerade oder ungerade ist.)

Aufgabe 4 (D+L): (Man kann alles einführen... es ist nur fraglich, ob es sinnvoll ist.)

Auf der Menge \mathbb{R}^2 führen wir die folgenden beiden Abbildungen ein:

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{sowie} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a, b), (c, d)) \mapsto (a + c, b + d) & (a, (b, c)) \mapsto (ab, ac) \end{array}$$

- a) Untersuchen Sie, ob die Mengen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 6y = 0\}$ und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 4\}$ bzgl. der Operation $+$ Gruppen sind.
- b) Prüfen Sie, ob A und B bzgl. der Operation \cdot abgeschlossen sind, d.h. ob für $a \in \mathbb{R}$ und $(c, d) \in A$ (bzw. B) gilt, dass auch $a \cdot (c, d) \in A$ (bzw. B) gilt.
- c) Identifizieren Sie \mathbb{R}^2 mit der Zeichenebene und beschreiben Sie die den Mengen A und B entsprechenden Punktmengen.

Aufgabe 5 (*): (Computer sind nicht intelligent. Sie denken nur, sie seien es.)

Gegeben seien Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg(f) \geq 1$ und $\deg(g) \geq 1$.

- a) Mit welchen Maple-Befehlen kann man die Polynome g und r in der Darstellung $f = q \cdot g + r$ gemäß Satz (6.10) finden? Schreiben Sie eine kurze Maple-Funktion `PolyDivision(f, g)`, die das Paar (q, r) berechnet.
- b) Schreiben Sie ein Maple-Programm `PolyEuklid(f, g)`, das den größten gemeinsamen Teiler von f und g mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus berechnet. Wenden Sie Ihr Programm an selbstgewählten Beispielen an, um seine Korrektheit in verschiedenen Situationen zu beweisen.