Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Freitag, 17.01.2003, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (P): (Komposition = Zusammenfügung verschiedener Teile zu einem harmonischen Ganzen)
Gegeben seien zwei Matrizen $\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_{3,2}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{B} \in \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$. Für die zu $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ gehörige lineare Abbildung $f_{\mathcal{AB}}$ soll gelten:

1) $f_{\mathcal{AB}}(e_1), f_{\mathcal{AB}}(e_2), f_{\mathcal{AB}}(e_3)$ sind linear unabhängig,
2) $f_{\mathcal{AB}}(e_1), f_{\mathcal{AB}}(e_2), f_{\mathcal{AB}}(e_3)$ sind linear abhängig,
3) $f_{\mathcal{AB}}(e_1), f_{\mathcal{AB}}(e_2), f_{\mathcal{AB}}(e_3)$ sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

a) Finden Sie für jede Bedingung ein Beispiel für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ oder beweisen Sie, dass die Bedingung nicht erfüllbar ist.
b) Untersuchen Sie die entsprechenden Fragen für die Abbildung $f_{\mathcal{BA}}$.

Aufgabe 2 (P): (Bier her, Bier her, oder i fall um!)
Eine Dortmunder Brauerei lieferte in den letzten drei Jahren folgende Biermengen (gemessen in "Biereinheiten") in ihre Absatzmärkte A, B, C, D:

2000	Pils:	1013 nach A, 714 nach B, 310 nach C, 282 nach D.
	Lager:	612 nach A, 422 nach B, 201 nach C, 188 nach D.
	Alt:	186 nach A, 88 nach B, 12 nach C, 24 nach D.
2001	Pils:	1188 nach A, 512 nach B, 280 nach C, 344 nach D.
	Lager:	711 nach A, 404 nach B, 161 nach C, 240 nach D.
	Alt:	210 nach A, 72 nach B, 10 nach C, 21 nach D.
2002	Pils:	1096 nach A, 719 nach B, 166 nach C, 302 nach D.
	Lager:	667 nach A, 440 nach B, 108 nach C, 202 nach D.
	Alt:	193 nach A, 66 nach B, 0 nach C, 16 nach D.

a) Beschreiben Sie diese Daten mit geeigneten Matrizen. Wie groß war die durchschnittliche Absatzmenge pro Biersorte und Absatzmarkt? Finden Sie eine Matrizenoperation, die diese Frage beantwortet.
b) Pro Biereinheit sei der Gewinn der Brauerei abhängig von den Transportkosten zum Absatzmarkt. Er sei $0,83$ Euro für A, $0,91$ Euro für B, $1,04$ Euro für C und $0,69$ Euro für D. Mit welcher Matrizenoperation kann man den durchschnittlichen Gesamtgewinn pro Biersorte und Absatzmarkt berechnen? Welche Anteile am Gesamtgewinn haben die drei Biersorten?

Aufgabe 3 (D+L):
("Wie kann man eine Projektion verlängern?" "Mit Viagra!"
Sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt und sei G eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt, die nicht in E enthalten ist.

a) Beweisen Sie $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$.

b) Zeigen Sie, dass durch $p_1 : \mathbb{R}^3 \to E$ und $p_2 : \mathbb{R}^3 \to G$ mit $p_1(v) = v'$ und $p_2(v) = v''$ für $v = (v', v'') \in \mathbb{R}^3$ zwei $\mathbb{R}$–lineare Abbildungen gegeben sind.

c) Erklären Sie die geometrische Wirkung von p_1 und p_2. Wie kann man das Bild eines Punktes konstruieren?

Tipp: Die Abbildungen p_1 und p_2 heißen auch **Projektionen**.

Aufgabe 4 (D+L):
(Die Mathematik folgt dem Pfad der maximalen Ironie.)
Sei K ein Körper, seien V, W zwei endlich–dimensionale K–Vektorräume, sei $f : V \to W$ eine K–lineare Abbildung, und sei $U \subseteq W$ ein K–Untervektorraum. Beweisen Sie

$$\dim_K f^{-1}(U) = \dim_K(U \cap \operatorname{Bild}(f)) + \dim_K(\operatorname{Kern}(f)).$$

Aufgabe 5 ($\star$): (Es kann nur einen geben!)
Sei K ein Körper, sei V ein endlich–dimensionaler K–Vektorraum, und seien U_1, U_2 zwei K–Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

1) Es gilt $V = U_1 \oplus U_2$.
2) Ist W ein K–Vektorraum und sind $f_1 : U_1 \to W$ sowie $f_2 : U_2 \to W$ zwei K–lineare Abbildungen, so gibt es genau eine K–lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f|_{U_1} = f_1$ und $f|_{U_2} = f_2$.
3) Es gibt K–lineare Abbildungen $p_1 : V \to U_1$ und $p_2 : V \to U_2$, so dass für jeden K–Vektorraum W und alle K–linearen Abbildungen $q_1 : W \to U_1$ sowie $q_2 : W \to U_2$ eine eindeutige K–lineare Abbildung $f : W \to V$ existiert mit $q_1 = p_1 \circ f$ und $q_2 = p_2 \circ f$.

Skizze:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "q_1"'] \arrow[ddr, "q_2"] & \\
 & V \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
U_1 & & U_2
\end{tikzcd}$$