Musterlösung zu Blatt 3, Aufgabe 5, LinA I, WS 2002/03

Aufgabe 5:

$$\text{Sei } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5 \text{ gegeben.}$$

a) Schreibe σ als Produkt von Transpositionen!

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_{1,5} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{2,4} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beachte hier: VON RECHTS NACH LINKS!!!

b) Schreibe σ als Produkt von Nachbartranspositionen! (vgl. Beispiel 3.21)

aus a) weiß man schon

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_{1,5} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{2,4} \\ &= \underbrace{\tau_{4,5} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{4,5}}_{=\tau_{1,5}} \\ &\qquad \circ \underbrace{\tau_{4,5} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{4,5}}_{=\tau_{2,5}} \\ &\qquad \circ \underbrace{\tau_{3,4} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{3,4}}_{=\tau_{2,4}}. \end{aligned}$$

c) i) Wieviele Fehlstände besitzt σ?

Definition: Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
Ein Paar (i,j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ heißt ein **Fehlstand** von σ.
Mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

folgen also folgende Fehlstände:
$(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(3,5)$.
Insgesamt also 9 Fehlstände.

ii) Ist σ gerade oder ungerade?

Da σ 9 Fehlstände besitzt, ist σ eine ungerade Permutation (vgl. Def. 3.23.c). Zu selbigem Ergebnis gelangt man mit Satz 3.26, da ja σ Produkt von 3 Transpositionen ist. Auch über die ungerade Anzahl von Nachbartranspositionen kommt man hier zum Ziel. $\square$