Aufgabe 24: Sei K ein Körper und $K(x)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten x über K. Dann gilt:

a) Für jedes algebraische Element a von $K(x)$ gilt $a \in K$.
b) Die Körpererweiterung $K(x)/K$ besitzt unendlich viele Zwischenkörper.

Beweis. Für den Beweis von a) sei $a \in K[x]$ algebraisch über K mit $a = \frac{f}{g}$ für Polynome $f, g \in K[x]$ mit $g \neq 0$. Schreibe $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{m} g_k x^k$, wobei $f_0, \ldots, f_n, g_0, \ldots, g_m \in K$ und $g_m \neq 0$. Dann gilt

$$0 = ag - f = (ag_0 - f_0) + (ag_1 - f_1)x + \cdots + (ag_r - f_r)x^r \in K(a)[x]$$

mit $r = \max\{n, m\}$ und $f_{n+1} = \cdots = f_r = 0$ bzw. $g_{m+1} = \cdots = g_r = 0$. Ist dabei mindestens ein Koeffizient ungleich Null, so ist das Element x algebraisch über $K(a)$, d.h. $[K(x) : K(a)] < \infty$. Da a nach Voraussetzung algebraisch über K ist, gilt zudem $[K(a) : K] < \infty$. Mit dem Gradsatz für Körpererweiterungen erhalten wir insgesamt $[K(x) : K] < \infty$ im Widerspruch zur Transzendenz von x über K. Also mssen alle Koeffizienten in der obigen Gleichung bereits Null sein. Dann folgt aber insbesondere $a = \frac{f_m}{g_m} \in K$.

Um b) zu zeigen, betrachten wir den Körper $K(x^{2^k})$ für $k \geq 1$. Offensichtlich gilt $K(x) \supseteq K(x^2) \supseteq K(x^{2^2}) \supseteq \cdots \supseteq K$. Wir zeigen nun, dass auch $K(x^{2^{k+1}}) \subsetneq K(x^{2^k})$ gilt für alle $k \geq 0$. Angenommen, es ist $x^{2^k} \in K(x^{2^{k+1}})$ für ein $k \geq 0$. Dann existieren Polynome $f, g \in K[x^{2^{k+1}}]$ mit $x^{2^k} = \frac{f}{g}$ und $2^{k+1} | \deg(f), \deg(g)$. Es ergibt sich $x^{2^k} g = f$ und mit der Gradformel $2^k + \deg(g) = \deg(f)$. Da aber 2^{k+1} kein Teiler von 2^k ist, erhalten wir einen Widerspruch zu unserer Annahme. Damit folgt

$$K(x) \supsetneq K(x^2) \supsetneq K(x^{2^2}) \supsetneq \cdots \supsetneq K,$$

d.h. $K(x)/K$ besitzt unendlich viele Zwischenkörper. $\square$