Aufgabe 30: Die Zahl e ist transzendent über $\mathbb{Q}$.

Beweis. Angenommen, e ist algebraisch über $\mathbb{Q}$. Dann existieren Elemente $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 \neq 0$ und

$$a_m e^m + \cdots + a_1 e + a_0 = 0.$$

Betrachte das Polynom

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}(x-1)^n \cdots (x-m)^n \in \mathbb{Q}[x]$$

vom Grad $mn + n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(mn+n-1)}(x).$$

Wende nun Lemma 7.7 an und erhalte für $k = 0, \ldots, m$ die Gleichung

$$\int_0^k f(t)e^{-t}dt = F(0) - F(k)e^{-k}.$$

Multiplikation mit $a_k e^k$ und Aufsummieren der Gleichungen liefert dann

$$\sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt = -\sum_{k=0}^{m} a_k F(k). \qquad (*)$$

Untersuche zunächst die rechte Seite der Gleichung. Es ist $f^{(l)}(0) = 0$ für $l = 0, \ldots, n-2$ und $f^{(n-1)}(0) = (-1)^{mn} m!^n$. Für $l \geq n$ ist nach Lemma 7.6 jeder Koeffizient der l-ten Ableitung von $x^{n-1}(x-1)^n \cdots (x-m)^n$ durch $n!$ teilbar. Dann ist $f^{(l)} \in \mathbb{Z}[x]$ mit durch n teilbaren Koeffizienten, d.h. $f^{(l)}(0) = nr_l$ für ein $r_l \in \mathbb{Z}$. Zusammen ergibt sich

$$F(0) = \sum_{l=0}^{mn+n-1} f^{(l)}(0) = (-1)^{mn} m!^n + nr \in \mathbb{Z}$$

mit $r = \sum_{l=n}^{mn-1} r_l$.

Weiter gilt $f^{(l)}(k) = 0$ für $l = 0, \ldots, n-1$ und $k = 1, \ldots, m$. Für $l \geq n$ ergibt sich mit obiger Argumentation $f^{(l)}(k) = nr'_l$ für ein $r'_l \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten damit

$$F(k) = \sum_{l=0}^{mn+n-1} f^{(l)}(k) = \sum_{l=n}^{mn+n-1} nr'_l = nr' \in \mathbb{Z}$$

mit $r' = \sum_{l=n}^{mn-1} r'_l$. Für die rechte Seite in Gleichung $(*)$ ergibt sich somit

$$-\sum_{k=0}^{m} a_k F(k) = -(-1)^{mn} m!^n a_0 - n(ra_0 + r' \sum_{k=1}^{m} a_k) \in \mathbb{Z},$$

d.h. für $n > |a_0|$ mit $\mathrm{ggT}(n, m!) = 1$ eine nicht durch n teilbare ganze Zahl, also

$$\left| -\sum_{k=0}^{m} a_k F(k) \right| \geq 1.$$

Wir wollen nun die linke Seite in $(*)$ abschätzen. Im Intervall $[0, m]$ gilt für den Betrag von f die Abschätzung

$$|f(x)| \leq \frac{m^{mn+n-1}}{(n-1)!}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t) e^{-t} dt \right| &\leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| \left| \int_0^k f(t) e^{k-t} dt \right| \\
&\leq \frac{m^{mn+n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{m} |a_k| \left| \int_0^k e^{k-t} dt \right| \\
&\leq \frac{m^{mn+n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{m} |a_k| k e^k \\
&< \frac{m^{mn+n}}{(n-1)!} e^m \sum_{k=0}^{m} |a_k|.
\end{aligned}$$

Der Betrag der linken Seite ist also durch eine Konstante beschränkt, die für genügend große n kleiner als 1 ist. Wähle nun ein solches n mit $n > |a_0|$ und $\mathrm{ggT}(n, m!) = 1$ und erhalte einen Widerspruch. Also ist e transzendent über $\mathbb{Q}$. $\square$