Aufgabe 44:
Seien H_1, H_2 Gruppen und sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(H_2, \mathrm{Aut}(H_1))$. Dann gilt:

a) Ist $G = H_1 \rtimes H_2$ semidirektes Produkt von H_1 und H_2, so besitzt jedes Element $g \in G$ eine eindeutige Darstellung der Form $g = h_1 h_2$ mit $h_1 \in H_1$ und $h_2 \in H_2$.
b) Auf $G = H_1 \times H_2$ sei durch

$$(h_1, h_2)(\bar{h}_1, \bar{h}_2) = (h_1(\varphi(h_2))(\bar{h}_1), h_2\bar{h}_2)$$

eine Multiplikation definiert für $h_1, \bar{h}_1 \in H_1$ und $h_2, \bar{h}_2 \in H_2$. Dann ist G eine Gruppe, und es existieren Untergruppen G_1, G_2 von G mit $G_1 \cong H_1$, $G_2 \cong H_2$ und $G = G_1 \rtimes G_2$.

Beweis. Für den Beweis von a) seien $g \in G$, $h_1, h'_1 \in H_1$ und $h_2, h'_2 \in H_2$ mit $g = h_1 h_2 = h'_1 h'_2$. Dann ist ${h'_1}^{-1} h_1 = h'_2 h_2^{-1} \in H_2$, also $h_1 = h'_1$ wegen $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. Damit ergibt sich auch $h_2 = h'_2$.
Sei nun $G = H_1 \times H_2$ und seien $(f_1, f_2), (g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G$. Zunächst ist G abgeschlossen bzgl. der angegebenen Multiplikation, denn

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1\varphi(g_2)(h_1), g_2h_2) \in H_1 \times H_2.$$

Nachrechnen ergibt die Assoziativität:

$$\begin{aligned}
[(f_1, f_2)(g_1, g_2)](h_1, h_2) &= (f_1\varphi(f_2)(g_1), f_2g_2)(h_1, h_2) \\
&= (f_1\varphi(f_2)(g_1)\varphi(f_2g_2)(h_1), f_2g_2h_2) \\
&= (f_1\varphi(f_2)(g_1)\varphi(f_2)(\varphi(g_2)(h_1)), f_2g_2h_2) \\
&= (f_1\varphi(f_2)(g_1\varphi(g_2)(h_1)), f_2g_2h_2) \\
&= (f_1, f_2)(g_1\varphi(g_2)(h_1), g_2h_2) \\
&= (f_1, f_2)[(g_1, g_2)(h_1, h_2)].
\end{aligned}$$

Ist e_1 das neutrale Element von H_1 und e_2 von H_2, so erhalte (e_1, e_2) als neutrales Element von G, denn

$$\begin{aligned}
(h_1, h_2)(e_1, e_2) = (h_1\varphi(h_2)(e_1), h_2e_2) = (h_1e_1, h_2) = (h_1, h_2), \\
(e_1, e_2)(h_1, h_2) = (e_1\varphi(e_2)(h_1), e_2h_2) = (e_1h_1, h_2) = (h_1, h_2).
\end{aligned}$$

Das inverse Element zu (h_1, h_2) ist $(\varphi(h_2^{-1})(h_1^{-1}), h_2^{-1}) \in G$, denn

$$\begin{aligned}
(h_1, h_2)(\varphi(h_2^{-1})(h_1^{-1}), h_2^{-1}) &= (h_1\varphi(h_2)(\varphi(h_2^{-1})(h_1^{-1})), h_2h_2^{-1}) \\
&= (h_1\varphi(h_2h_2^{-1})(h_1^{-1}), e_2) \\
&= (h_1h_1^{-1}, e_2) \\
&= (e_1, e_2), \\
(\varphi(h_2^{-1})(h_1^{-1}), h_2^{-1})(h_1, h_2) &= (\varphi(h_2^{-1})(h_1^{-1})\varphi(h_2^{-1})(h_1), h_2^{-1}h_2) \\
&= (\varphi(h_2^{-1})(h_1^{-1}h_1), e_2) \\
&= (\varphi(h_2^{-1})(e_1), e_2) \\
&= (e_1, e_2).
\end{aligned}$$

Insgesamt ist G mit der angegebenen Multiplikation also eine Gruppe.
Betrachte nun die Teilmengen $G_1 = H_1 \times \{e_2\}$ und $G_2 = \{e_1\} \times H_2$ von G. Diese sind offensichtlich zu H_1 bzw. H_2 isomorphe Untergruppen von G. Weiter gilt

$$(h_1, h_2) = (h_1\varphi(e_2)(e_1), e_2h_2) = (h_1, e_2)(e_1, h_2),$$

d.h $G = G_1G_2$. Zudem ergibt sich für jedes $h \in H_1$

$$\begin{aligned}
(h_1, h_2)(h, e_2)(h_1, h_2)^{-1} &= (h_1\varphi(h_2)(h), h_2e_2)(\varphi(h_2^{-1})(h_1^{-1}), h_2^{-1}) \\
&= (h_1\varphi(h_2)(h)\varphi(h_2)(\varphi(h_2^{-1})(h_1^{-1})), h_2h_2^{-1}) \\
&= (h_1\varphi(h_2)(h)h_1^{-1}, e_2) \in G_1,
\end{aligned}$$

also ist G_1 ein Normalteiler von G. Schließlich gilt noch $G_1 \cap G_2 = \{(e_1, e_2\}$, und G ist damit das semidirekte Produkt von G_1 und G_2. $\square$