Aufgabe 55:
Für eine abelsche Gruppe G und eine Primzahl p heißt die Untergruppe

$$T_p(G) = \{g \in G \mid \mathrm{ord}_G(g) = p^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\}$$

von G die p-*Torsionsgruppe* von G.
Sei nun G eine abelsche Gruppe der Ordnung $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \dots, p_r$ und Zahlen $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $G \cong T_{p_1}(G) \times \cdots \times T_{p_r}(G)$.
b) Für $i = 1, \dots, r$ ist $T_{p_i}(G)$ die einzige p_i-Sylowuntergruppe von G.

Beweis. Um a) zu zeigen, betrachte die Abbildung $\varphi : T_{p_1}(G) \times \cdots T_{p_r}(G) \longrightarrow G$ definiert durch $(g_1, \dots, g_r) \mapsto g_1 \cdots g_r$. Da G abelsch ist, ist φ ein Homomorphismus von Gruppen. Für den Beweis der Injektivität von φ sei $(g_1, \dots, g_r) \in T_{p_1}(G) \times \cdots T_{p_r}(G)$ mit $g_1 \cdots g_r = 1$. Dann gilt für $i = 1, \dots, r$ die Gleichung $g_i^{-1} = g_1 \cdots g_{i-1} g_{i+1} \cdots g_r$ und $\mathrm{ord}_G(g_i^{-1}) = \mathrm{ord}_G(g_i) = p_i^{l_i}$ bzw. $\mathrm{ord}_G(g_1 \cdots g_{i-1} g_{i+1} \cdots g_r) = p_1^{l_1} \cdots p_{i-1}^{l_{i-1}} p_{i+1}^{l_{i+1}} \cdots p_r^{l_r}$ für gewisse $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}_0$. Es folgt $l_1 = \cdots = l_r = 1$ wegen $p_1, \dots, p_r$ paarweise verschieden, also $g_i = 1$. Erhalte insgesamt $(g_1, \dots, g_r) = (1, \dots, 1)$.
Surjektivität von φ: Sei $g \in G$ mit $\mathrm{ord}_G(g) = p_1^{l_1} \cdots p_r^{l_r}$ und sei $g_i = g^{p_1^{l_1} \cdots p_{i-1}^{l_{i-1}} p_{i+1}^{l_{i+1}} \cdots p_r^{l_r}}$ für $i = 1, \dots, r$ mit $\mathrm{ord}_G(g_i) = p_i^{l_i}$. Da $p_1, \dots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen sind, ist $\mathrm{ggT}(p_2^{l_2} \cdots p_r^{l_r}, \dots, p_1^{l_1} \cdots p_{r-1}^{l_{r-1}}) = 1$, d.h. es existieren Zahlen $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{Z}$ mit $1 = s_1 p_2^{l_2} \cdots p_r^{l_r} + \cdots + s_r p_1^{l_1} \cdots p_{r-1}^{l_{r-1}}$. Nun ist $(g_1^{s_1}, \dots, g_r^{s_r})$ ein Element von $T_{p_1}(G) \times \cdots T_{p_r}(G)$ mit

$$\varphi(g_1^{s_1}, \dots, g_r^{s_r}) = g_1^{s_1} \dots g_r^{s_r}) = g^{s_1 p_2^{l_2} \cdots p_r^{l_r} + \cdots + s_r p_1^{l_1} \cdots p_{r-1}^{l_{r-1}}} = g^1 = g.$$

Aus a) folgt auch b), denn wegen der Kommutativität von G existiert zu jedem $i \in \{1, \dots, r\}$ genau eine p_i-Sylowuntergruppe von G, da diese zueinander konjugiert sind. Dabei ist die einzige p_i-Sylowuntergruppe von G offensichtlich eine Teilmenge von $T_{p_i}(G)$, d.h. $|T_{p_i}(G)| \geq p_i^{k_i}$. Andererseits gilt nach a) wegen $T_{p_i}(G) \cap T_{p_j}(G) = \{1\}$ für $i \neq j$

$$|T_{p_1}(G) \times \cdots T_{p_r}(G)| = |T_{p_1}(G)| \cdots |T_{p_r}(G)| = |G| = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r},$$

also $|T_{p_i}(G)| = p_i^{k_i}$. □