Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 10.04.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 1

Aufgabe 1: (Ein bisschen Bewegung tut gut !)
Die *Bewegungen* der Euklidischen Ebene $\mathbb{E}$ entstehen durch Komposition von Translationen, Drehungen und Spiegelungen. Finden Sie für die folgenden geometrischen Figuren jeweils die *Symmetriegruppe*, d.h. die Gruppe aller Bewegungen, die diese Figur in sich selbst überführen.

a) Gleichseitiges Dreieck: $\triangle$

b) Quadrat: $\square$

c) Kreis: $\bigcirc$

d) Griechischer Buchstabe Φ: Φ

Aufgabe 2: (Die flotten Dreier-Zyklen)
Seien $a, b \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a \neq b$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass für $n \geq 3$ die alternierende Gruppe $A_n$von den Dreierzyklen (a, b, k) mit $k \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{a, b\}$ erzeugt wird, d.h. dass jede gerade Permutation als Produkt solcher Dreierzyklen darstellbar ist.

Aufgabe 3:

a) Das *Zentrum* einer Gruppe G ist die Menge

$$Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G\}.$$

Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.

b) Die Restklassengruppe $G/Z(G)$ sei zyklisch. Beweisen Sie, dass G dann kommutativ ist.

Aufgabe 4: (Geht's nicht noch etwas einfacher ?)
Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{Q}[x]/(f)$ eine endliche einfache Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist und $[K : \mathbb{Q}] = 3$ gilt.
b) Beweisen Sie, dass $a = 2-3z+2z^2 \neq 0$ ist und stellen Sie a^{-1} als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $\{1, z, z^2\}$ dar.
c) Stellen Sie z^4 und z^6 als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $\{1, z, z^2\}$ dar.
d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von z^2 über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 5: (Irreduzibel oder nicht irreduzibel, das ist hier die Frage !)
Schreiben Sie ein CoCoA-Programm, das alle irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{F}_2[x]$ vom Grad $\deg(f) \leq 10$ bestimmt.