

Algebra I Übungsblatt 11

Aufgabe 49:

Zeigen Sie, dass für $1 \leq n \leq 4$ die Gruppe S_n auflösbar ist.

Aufgabe 50:

Sei p eine Primzahl und

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Zeigen Sie:

- a) G ist eine auflösbare Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$.
- b) G ist eine p -Sylowuntergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$.

Aufgabe 51:

Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen mit $p \neq 2 \neq q$. Zeigen Sie:

- a) Existiert in einer Gruppe G der Ordnung $p^n m$ mit $p \nmid m$ nur eine p -Sylowuntergruppe, so ist diese ein Normalteiler von G .
- b) Jede Gruppe der Ordnung pq ist auflösbar.
- c) Jede Gruppe der Ordnung $2pq$ ist auflösbar.

Aufgabe 52:

Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $p^2 q$ nicht einfach ist.