Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 26.06.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 12

Aufgabe 53:
Zeigen Sie, dass jede Gruppe G mit Ordnung $|G| < 36$ auflösbar ist.

Aufgabe 54:
Sei G eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

a) G ist genau dann endlich erzeugt, wenn es für ein $n \in \mathbb{N}$ einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}^n \longrightarrow G$ gibt.
b) Jede Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist endlich erzeugt.
c) Ist G endlich erzeugt, so ist auch jede Untergruppe von G endlich erzeugt.
d) Die *Torsionsgruppe* $T(G) = \{g \in G \mid \operatorname{ord}_G(g) < \infty\}$ von G ist endlich, falls G endlich erzeugt ist.

Aufgabe 55:
Für eine abelsche Gruppe G und eine Primzahl p heißt die Untergruppe

$$T_p(G) = \{g \in G \mid \operatorname{ord}_G(g) = p^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\}$$

von G die *p-Torsionsgruppe* von G.
Sei nun G eine abelsche Gruppe der Ordnung $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ und Zahlen $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $G \cong T_{p_1}(G) \times \cdots \times T_{p_r}(G)$.
b) Für $i = 1, \ldots, r$ ist $T_{p_i}(G)$ die einzige p_i-Sylowuntergruppe von G.

Aufgabe 56:
Zeigen Sie:

a) Jeder algebraisch abgeschlossene Körper ist unendlich.
b) Der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_p$ besteht genau aus allen Einheitswurzeln über $\mathbb{F}_p$ und 0.