Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 03.07.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 13

Aufgabe 57:
Bestimmen Sie den Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$:

a) $f(x) = x^3 - 19x + 30$,
b) $f(x) = x^5 - 1$,
c) $f_a(x) = x^3 - ax^2 + (a-3)x + 1$ mit $a \in \mathbb{Z}$.
[Tipp: Mit $b \in \mathbb{R}$ sind auch $\frac{1}{1-b}$ und $\frac{b-1}{b}$ Nullstellen von f_a.]

Aufgabe 58:
Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und L/K eine Körpererweiterung von K. Zeigen Sie:

a) Ist $a \in L$ algebraisch, so existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, so dass a^{p^n} separabel über K ist.
b) Ist L/K endlich und p kein Teiler von $[L : K]$, so ist L/K separabel.

Aufgabe 59:
Sei K ein Körper, $K(t)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten t über K und $u = \frac{f}{g}$ mit teilerfremden $f, g \in K[t] \backslash K$. Zeigen Sie:

a) Das Polynom $f(x) - ug(x) \in K(u)[x]$ ist irreduzibel.
b) Die Körpererweiterung $K(t)/K(u)$ ist genau dann separabel, wenn $f' \neq 0$ oder $g' \neq 0$ gilt.

Aufgabe 60:
Sei K ein Körper und L/K eine endliche Körpererweiterung von K. Zeigen Sie:

a) Ist $[L : K] = 2$, so ist L/K normal.
b) Für Zwischenkörper M_1 und M_2 von L/K heißt der Körper $M_1M_2 = K(M_1 \cup M_2)$ das *Kompositum* von M_1 und M_2. Sind die Körpererweiterungen M_1/K und M_2/K normal, so ist auch M_1M_2/K normal.

Aufgabe 61:
Sei $a = (1+i)\sqrt[4]{5}$. Zeigen Sie:

a) Die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ sind normal.
b) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ ist nicht normal.