

Algebra I Übungsblatt 14

Aufgabe 62:

Sei L der Zerfällungskörper von $x^4 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ über \mathbb{Q} . Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Körpererweiterung L/\mathbb{Q} und alle Untergruppen der Galoisgruppe $G(L/K)$.

Aufgabe 63:

Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ ein Polynom. Ist L der Zerfällungskörper von f über K , so heißt $G(f : K) = G(L/K)$ die *Galoisgruppe* von f über K . Sei nun f irreduzibel über K . Zeigen Sie:

- a) Enthält K alle n -ten Einheitswurzeln für $n \geq 2$ und ist $f(x) = x^n - a$ für ein $a \in K$, so gilt $\text{Gal}(f : K) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- b) Ist $p = \deg(f)$ eine Primzahl und enthält $G(f : K)$ ein Element der Ordnung p sowie eine Transposition, so gilt $\text{Gal}(f : K) \cong S_p$.
- c) Sei p prim und $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg(f) = p$. Hat f genau zwei nicht-reelle Nullstellen in \mathbb{C} , so gilt $\text{Gal}(f : \mathbb{Q}) \cong S_p$.
- d) Ist $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit abelscher Galoisgruppe $\text{Gal}(f : \mathbb{Q})$, so ist $\text{Gal}(f : \mathbb{Q})$ eine Gruppe der Ordnung $\deg(f)$.

Aufgabe 64:

Bestimmen Sie die Galoisgruppe der folgenden Polynome:

- a) $f(x) = x^3 - 10 \in \mathbb{Q}[x]$,
- b) $f(x) = x^p - a \in K[x]$ mit $a \in K$ und $\text{char}(K) = p > 0$,
- c) $f(x) = x^n - a \in \mathbb{C}(a)[x]$ mit $n \in \mathbb{N}$ und a transzendent über \mathbb{C} .

Aufgabe 65:

Sei K ein Körper und $L = K(x_1, \dots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten x_1, \dots, x_n über K . Zeigen Sie:

- a) Sind s_0, \dots, s_n die elementarsymmetrischen Polynome in x_1, \dots, x_n über K und ist $M = K(s_0, \dots, s_n)$, so ist die Körpererweiterung L/M Galoissch vom Grad $n!$.
- b) Das *allgemeine Polynom n -ten Grades* $f(x) = x^n + y_1x^{n-1} + \dots + y_{n-1}x + y_n \in K(y_1, \dots, y_n)[x]$ ist über $K(y_1, \dots, y_n)$ für $n \geq 5$ nicht durch Radikale auflösbar.