Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Di, 02.05.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 4

Aufgabe 16:
Sei R ein nullteilerfreier Ring. Zeigen Sie:

a) Der Polynomring $R[x]$ über R in der Unbestimmten x ist ein Integritätsbereich.
b) Die Einheiten von $R[x]$ sind genau die Einheiten von R.
c) In $R[x]$ gilt die Gradformel, d.h. für $f, g \in K[x] \setminus \{0\}$ gilt $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.
d) Ist S ein kommutativer Ring, so ist ein Polynom $f \in S[x]$ genau dann nilpotent, wenn alle seine Koeffizienten nilpotent sind.

Aufgabe 17:
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $3, 2 + \sqrt{-5}$ und $2 - \sqrt{-5}$ sind irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
b) 3 ist kein Primelement von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
c) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist kein faktorieller Ring.

Aufgabe 18:
Sei K ein endlicher oder unendlicher Körper. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: In $K[x]$ gibt es unendlich viele, paarweise verschiedene, nicht assoziierte, irreduzible Polynome.

Definition: Ein nullteilerfreier Ring R heißt *euklidischer Ring*, wenn es eine Abbildung $\varphi : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $a, b \in R$ Elemente $q, r \in R$ existieren mit

i) $a = qb + r$,
ii) $r = 0$ oder $r \neq 0$ und $\varphi(r) < \varphi(b)$.

Aufgabe 19:
Sei $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Z}[i]$ ist ein euklidischer Ring.
b) $\mathbb{Z}[i]$ ist ein faktorieller Ring.
c) Eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist genau dann reduzibel in $\mathbb{Z}[i]$, wenn sie Summe von zwei Quadraten ist.

Aufgabe 20:
Zeigen Sie, dass jeder euklidische Ring ein Hauptidealring ist.