

Algebra I Übungsblatt 5

Aufgabe 21:

Sei p eine Primzahl und $\pi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$ der kanonische Homomorphismus. Zeigen Sie:

- a) Ist $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein normiertes Polynom und $\pi(f)$ irreduzibel in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$, dann ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.
- b) Die Aussage in a) gilt i.A. nicht, wenn f nicht normiert ist.
- c) Die Umkehrung von a) gilt nicht.

Aufgabe 22:

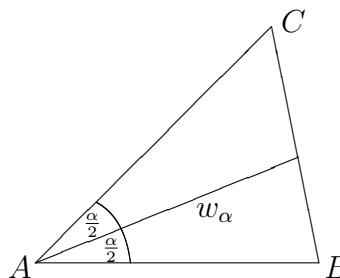
Entscheiden Sie, ob die folgenden Polynome irreduzibel sind.

- a) $x^3 - 2, x^5 - 2x^4 + 6x + 10, x^4 - 6x^2 + 5 \in \mathbb{Q}[x]$.
- b) $x^2 + 5x + 1, x^3 + 6x^2 + 11x + 8 \in \mathbb{Q}[x]$.
- c) $x^3 + 6x^2 + 8x + 4, x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.
- d) $x^3 - y^3, y^4 + (x + 1)^2 y^2 + x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x, y]$.

Aufgabe 23:

- a) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.
[Hinweis: Betrachten Sie den Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x], \varphi(x) = x + 1$.]

- b) Im nebenstehenden Dreieck seien die Längen der Strecken \overline{AB} und \overline{BC} sowie die Länge der Winkelhalbierenden w_α gleich 1. Zeigen Sie, dass dann das Dreieck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.



Aufgabe 24:

Sei K ein Körper und $K(x)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten x über K . Zeigen Sie:

- a) Für jedes algebraische Element a von $K(x)$ gilt $a \in K$.
- b) Die Körpererweiterung $K(x)/K$ besitzt unendlich viele Zwischenkörper.

Aufgabe 25:

Sei R ein faktorieller Ring und $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ ein minimales Primideal von R , d.h. für jedes Primideal $I \subseteq R$ mit $\{0\} \neq I \subseteq \mathfrak{p}$ folgt $I = \mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass dann \mathfrak{p} bereits ein Hauptideal von R ist.