Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 29.05.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 8

Aufgabe 36:
Entscheiden Sie, welche der folgenden Gruppen frei sind:

a) S_n für $n \in \mathbb{N}$,
b) $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$,
c) $(\mathbb{Q}, +)$,
d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
e) $G = \langle a, b : ba = ab^2, ab = ba^2 \rangle$.

Aufgabe 38:
Sei $F(x_1, \ldots, x_n)$ die freie von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erzeugte Gruppe und sei $U = \langle x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n} \rangle$ eine Untergruppe von $F(x_1, \ldots, x_n)$ mit $k_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $k_j \neq \pm 1$ für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$.
Zeigen Sie, dass U eine echte Untergruppe von $F(x_1, \ldots, x_n)$ ist mit $U \cong F(x_1, \ldots, x_n)$.

Aufgabe 37:

a) Zeigen Sie, dass die Quaternionengruppe $Q = \langle a, b : a^4 = 1, a^2b^2 = 1, bab^3a = 1 \rangle$ die Ordnung 8 hat.
b) Bestimmen Sie eine Präsentation der Diedergruppe D_4 und zeigen Sie, dass diese zu Q nicht isomorph ist.

Aufgabe 39:
Ein reduziertes Element $g = x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_r}^{k_r} \in F(x_1, \ldots, x_n)$ heißt *zyklisch reduziert*, falls entweder $i_1 \neq i_r$ oder $i_1 = i_r$ und $k_1 = k_r$ gilt. Zeigen Sie:

a) Jedes Element der freien Gruppe $F(x_1, \ldots, x_n)$ ist zu einem zyklisch reduzierten Element konjugiert.
b) $F(x_1, \ldots, x_n)$ ist *torsionsfrei*, d.h. jedes Element aus $F(x_1, \ldots, x_n)\backslash\{e\}$ hat unendliche Ordnung.

Aufgabe 40:
Es bezeichne $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$ die sogenannte *Modulgruppe*. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matrizen in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie:

a) Die Modulgruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ist isomorph zur Gruppe der Möbiustransformationen, d.h.
$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}.$$
b) Zu jeder Matrix $S \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ existiert eine Matrix $T \in \langle A, B \rangle$, so dass TS von der Form $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix}$ ist für ein $s \in \mathbb{Z}$ und mit $r = \pm 1$.
c) Die Menge $\{A, B\}$ ist ein Erzeugendensystem der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.
d) Es ist $\langle a, b : a^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$ eine Präsentation der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.