Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Di, 06.06.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 9

Aufgabe 41:
Sei $G = \langle x_1, \ldots, x_n : r_1 = 1, \ldots, r_m = 1\rangle$ eine Gruppe. Weiter seien die folgenden Transformationen definiert:

i) Setze $G = \langle x_1, \ldots, x_n : r_1 = 1, \ldots, r_{m+1} = 1\rangle$, wobei $r_{m+1} \in \ll r_1, \ldots, r_m \gg$ gilt.
ii) Setze $G = \langle x_1, \ldots, x_n : r_1 = 1, \ldots, r_{m-1} = 1\rangle$, wobei $r_m \in \ll r_1, \ldots, r_{m-1} \gg$ gilt.
iii) Setze $G = \langle x_1, \ldots, x_{n+1} : r_1 = 1, \ldots, r_{m+1} = 1\rangle$, wobei $x_{n+1} \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $r_{m+1} = x_{n+1}^{-1} w$ für ein $w \in F(x_1, \ldots, x_n)$ gilt.
iv) Setze $G = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} : r_1 = 1, \ldots, r_{m-1} = 1\rangle$, wobei $r_m = x_n^{-1} w$ für ein $w \in F(x_1, \ldots, x_{n-1})$ gilt.

Die Transformationen i)-iv) heißen *Tietze-Transformationen*.
Zeigen Sie, dass es zu zwei endlichen Präsentationen einer Gruppe G eine endliche Folge von Tietze-Transformationen gibt, die die eine in die andere überführt.

Aufgabe 42:
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es existiert genau eine Isometrie der Euklidischen Ebene, die drei nicht kollineare Fixpunkte besitzt.
b) Das Produkt zweier Gleitspiegelungen ist eine Rotation.
c) Das Produkt von vier Spiegelungen ist eine Rotation.

Aufgabe 43:
Sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ heißt das Element $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ der *Kommutator* von g und h. Die Menge aller Kommutatoren in G erzeugen eine Gruppe $[G, G]$, die sogenannte *Kommutatorgruppe*. Zeigen Sie:

a) $[G, G]$ ist ein Normalteiler von G.
b) Ist N ein Normalteiler von G, so ist G/N genau dann abelsch, wenn N die Kommutatorgruppe $[G, G]$ von G umfasst.
c) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von T, E^+ und E.

Aufgabe 44:
Seien H_1, H_2 Gruppen und sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(H_2, \mathrm{Aut}(H_1))$. Zeigen Sie:

a) Ist $G = H_1 \rtimes H_2$ semidirektes Produkt von H_1 und H_2, so besitzt jedes Element $g \in G$ eine eindeutige Darstellung der Form $g = h_1 h_2$ mit $h_1 \in H_1$ und $h_2 \in H_2$.
b) Auf $G = H_1 \times H_2$ sei durch
$$(h_1, h_2)(\bar{h}_1, \bar{h}_2) = (h_1(\varphi(h_2))(\bar{h}_1), h_2\bar{h}_2)$$
eine Multiplikation definiert für $h_1, \bar{h}_1 \in H_1$ und $h_2, \bar{h}_2 \in H_2$. Dann ist G eine Gruppe, und es existieren Untergruppen G_1, G_2 von G mit $G_1 \cong H_1$, $G_2 \cong H_2$ und $G = G_1 \rtimes G_2$.

Aufgabe 45:
Zeigen Sie, dass jede Gruppe isomorph zu einer Permutationsgruppe ist.