Symmetrien in Schule und Uni

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung "Symmetrie schadet nie"

Universität Passau, 20.12.2011

Inhaltsbersicht

Inhaltsbersicht

Inhaltsbersicht

Inhaltsbersicht

1. **Symmetrie in der Schule**
2. **Symmetrie in Mathematik-Wettbewerben**
3. **Symmetrie in der Linearen Algebra**

Inhaltsbersicht

1. **Symmetrie in der Schule**
2. **Symmetrie in Mathematik-Wettbewerben**
3. **Symmetrie in der Linearen Algebra**
4. **Symmetrie in der Algebra**

Inhaltsbersicht

1. **Symmetrie in der Schule**
2. **Symmetrie in Mathematik-Wettbewerben**
3. **Symmetrie in der Linearen Algebra**
4. **Symmetrie in der Algebra**
5. **Symmetrie im Alltag**

1 – Symmetrie in der Schule

Symmetrie ist was wir auf den ersten Blick sehen.

1 – Symmetrie in der Schule

Symmetrie ist was wir auf den ersten Blick sehen.

(Blaise Pascal)

1 – Symmetrie in der Schule

Symmetrie ist was wir auf den ersten Blick sehen.
(Blaise Pascal)

Das Thema **Symmetrie** taucht in den bayerischen Lehrplänen an verschiedenen Stellen auf.

Grundschule, 3. Klasse

Gymnasium, 7. Klasse

Gymnasium, 10. Klasse

1 – Symmetrie in der Schule

Symmetrie ist was wir auf den ersten Blick sehen.
(Blaise Pascal)

Das Thema **Symmetrie** taucht in den bayerischen Lehrplänen an verschiedenen Stellen auf.

Grundschule, 3. Klasse

Gymnasium, 7. Klasse

Gymnasium, 10. Klasse

Ferner ist Symmetrie ein Thema in mathematischen Schülerseminaren und Schülerwettbewerben sowie in Ausstellungen oder Vorträgen zu Themen wie **Mathematik in der Kunst** oder **Mathematik im Alltag**.

Symmetrie in der Grundschule

Bayerischer Lehrplan, Grundschule 3. Klasse:

Die Kinder entwickeln Kriterien, um achsensymmetrische von anderen Figuren zu unterscheiden und deren Merkmale zu erfassen. Auf dieser Grundlage sollen sie symmetrische Figuren in der Umwelt finden und durch spiegelbildliches Ergänzen selbst herstellen können.

Symmetrie in der Grundschule

Bayerischer Lehrplan, Grundschule 3. Klasse:

Die Kinder entwickeln Kriterien, um achsensymmetrische von anderen Figuren zu unterscheiden und deren Merkmale zu erfassen. Auf dieser Grundlage sollen sie symmetrische Figuren in der Umwelt finden und durch spiegelbildliches Ergänzen selbst herstellen können.

Fachbegriffe: Symmetrieachse, symmetrisch und deckungsgleich

Symmetrie in der Grundschule

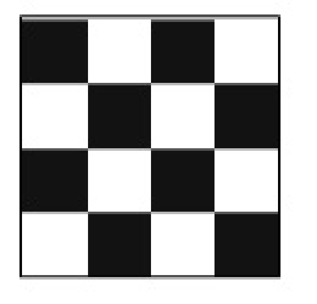
Bayerischer Lehrplan, Grundschule 3. Klasse:

Die Kinder entwickeln Kriterien, um achsensymmetrische von anderen Figuren zu unterscheiden und deren Merkmale zu erfassen. Auf dieser Grundlage sollen sie symmetrische Figuren in der Umwelt finden und durch spiegelbildliches Ergänzen selbst herstellen können.

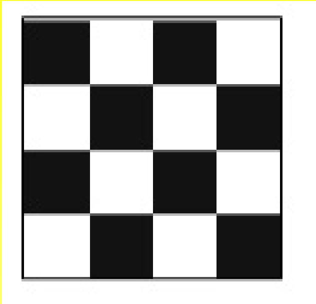
Fachbegriffe: Symmetrieachse, symmetrisch und deckungsgleich

Leistungsstärkere Schüler: Mehrfachspiegelung an parallelen bzw. aufeinander senkrecht stehenden Achsen

Aufgabe 1.1 Gibt es hier eine oder mehrere Symmetrieachsen? Oder gar keine? Zeichne sie ein!

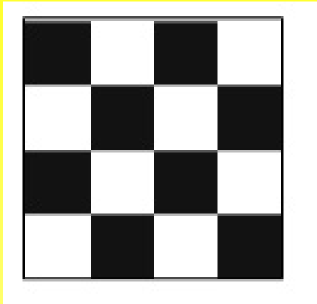


Aufgabe 1.1 Gibt es hier eine oder mehrere Symmetrieachsen? Oder gar keine? Zeichne sie ein!

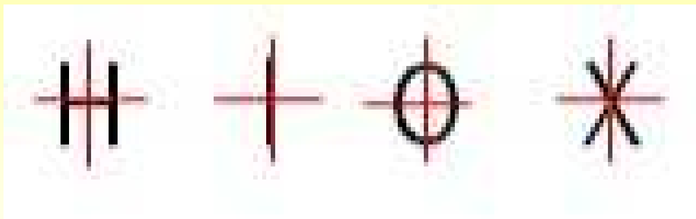


Aufgabe 1.2 Schreibe drei Großbuchstaben auf. Jeder Buchstabe soll genau zwei Symmetrieachsen haben. Zeichne die Symmetrieachsen auch ein!

Aufgabe 1.1 Gibt es hier eine oder mehrere Symmetrieachsen? Oder gar keine? Zeichne sie ein!



Aufgabe 1.2 Schreibe drei Großbuchstaben auf. Jeder Buchstabe soll genau zwei Symmetrieachsen haben. Zeichne die Symmetrieachsen auch ein!



Symmetrie in der Sekundarstufe I

Definitionen aus **Delta 7** (Mathematik für Gymnasien):

Symmetrie in der Sekundarstufe I

Definitionen aus **Delta 7** (Mathematik für Gymnasien):

(a) Eine Figur, die man so falten kann, dass ihre beiden Teile miteinander zur Deckung kommen, heißt **achsensymmetrisch**; die Faltlinie nennt man **Symmetrieachse**.

Symmetrie in der Sekundarstufe I

Definitionen aus **Delta 7** (Mathematik für Gymnasien):

(a) Eine Figur, die man so falten kann, dass ihre beiden Teile miteinander zur Deckung kommen, heißt **achsensymmetrisch**; die Faltlinie nennt man **Symmetrieachse**.

(b) Eine Figur heißt **punktsymmetrisch**, wenn sie bei einer Halbdrehung, also einer Drehung um 180°, mit sich selbst zur Deckung kommt. Den Punkt Z, um den man dabei die Figur dreht, nennt man **Symmetriezentrum**.

Symmetrie in der Sekundarstufe I

Definitionen aus **Delta 7** (Mathematik für Gymnasien):

(a) Eine Figur, die man so falten kann, dass ihre beiden Teile miteinander zur Deckung kommen, heißt **achsensymmetrisch**; die Faltlinie nennt man **Symmetrieachse**.

(b) Eine Figur heißt **punktsymmetrisch**, wenn sie bei einer Halbdrehung, also einer Drehung um 180°, mit sich selbst zur Deckung kommt. Den Punkt Z, um den man dabei die Figur dreht, nennt man **Symmetriezentrum**.

(c) Weitere Begriffe, die definiert werden, sind **Fixpunkt**, **spiegeln**, **Punktspiegelung**.

Anwendung: Klassifikation der Symmetrien von Vierecken, insbesondere Drachenviereck, Parallelogramm, gleichschenkliges Trapez, Raute, Rechteck, Quadrat.

Anwendung: Klassifikation der Symmetrien von Vierecken, insbesondere Drachenviereck, Parallelogramm, gleichschenkliges Trapez, Raute, Rechteck, Quadrat.

Manko: Drehungen um andere Winkel als 180°, die eine Figur in sich überführen, werden nicht als Symmetrien erkannt.

Anwendung: Klassifikation der Symmetrien von Vierecken, insbesondere Drachenviereck, Parallelogramm, gleichschenkliges Trapez, Raute, Rechteck, Quadrat.

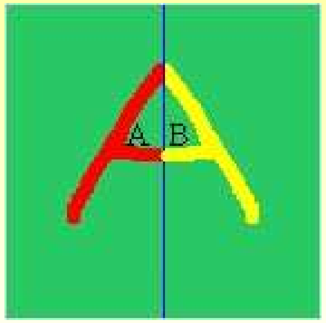
Manko: Drehungen um andere Winkel als 180°, die eine Figur in sich überführen, werden nicht als Symmetrien erkannt.

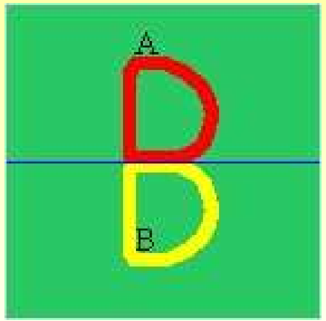
Aufgabe 1.3 Bestimme alle achsensymmetrischen Punkte des Alphabets. Zeichne die Hälfte des Buchstabens mit **GeoGebra**, spiegle sie und färbe die gespiegelte Hälfte ein.

Anwendung: Klassifikation der Symmetrien von Vierecken, insbesondere Drachenviereck, Parallelogramm, gleichschenkliges Trapez, Raute, Rechteck, Quadrat.

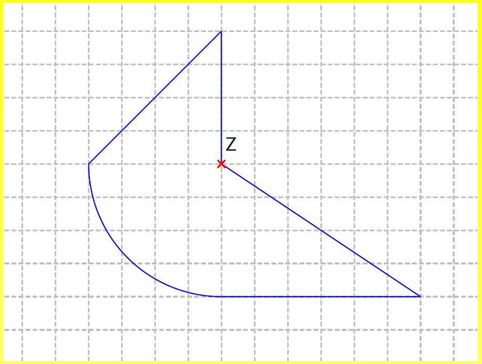
Manko: Drehungen um andere Winkel als 180°, die eine Figur in sich überführen, werden nicht als Symmetrien erkannt.

Aufgabe 1.3 Bestimme alle achsensymmetrischen Punkte des Alphabets. Zeichne die Hälfte des Buchstabens mit **GeoGebra**, spiegle sie und färbe die gespiegelte Hälfte ein.



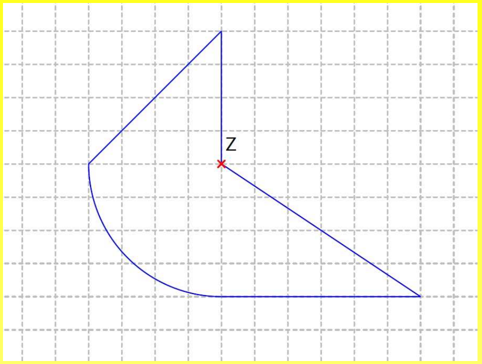


Aufgabe 1.4 Spiegele die folgende Figur am Punkt Z.



(Bayerischer Mathematik-Test 2005, 8. Klasse)

Aufgabe 1.4 Spiegele die folgende Figur am Punkt Z.



(Bayerischer Mathematik-Test 2005, 8. Klasse)

Aufgabe 1.5 Auf einem Papier sind eine Gerade g und zwei Punkte P und Q gezeichnet, die nicht auf g liegen. Beschreibe, wie man feststellen kann, ob die Punkte P und Q bezüglich g im Rahmen der Zeichengenauigkeit zueinander symmetrisch sind.

(Bayerischer Mathematik-Test 2005, 10. Klasse)

Symmetrie in der Sekundarstufe II

Definitionen aus **Delta 10** (Mathematik für Gymnasien) für den **Graphen** G_f einer Funktion f:

Symmetrie in der Sekundarstufe II

Definitionen aus **Delta 10** (Mathematik für Gymnasien) für den **Graphen** G_f einer Funktion f:

(a) Ist für jeden Wert $x \in D_f$ stets $f(-x) = f(x)$, so ist der Graph G_f **achsensymmetrisch zur y-Achse**.

Symmetrie in der Sekundarstufe II

Definitionen aus **Delta 10** (Mathematik für Gymnasien) für den **Graphen** G_f einer Funktion f:

(a) Ist für jeden Wert $x \in D_f$ stets $f(-x) = f(x)$, so ist der Graph G_f **achsensymmetrisch zur y-Achse**.

(b) Ist für jeden Wert $x \in D_f$ stets $f(-x) = -f(x)$, so ist der Graph G_f **punktsymmetrisch zum Ursprung**.

Symmetrie in der Sekundarstufe II

Definitionen aus **Delta 10** (Mathematik für Gymnasien) für den **Graphen** G_f einer Funktion f:

(a) Ist für jeden Wert $x \in D_f$ stets $f(-x) = f(x)$, so ist der Graph G_f **achsensymmetrisch zur y-Achse**.

(b) Ist für jeden Wert $x \in D_f$ stets $f(-x) = -f(x)$, so ist der Graph G_f **punktsymmetrisch zum Ursprung**.

(c) Weitere Begriffe: **Verschieben** des Graphen (in x- oder y-Richtung), **Spiegeln** des Graphen (an der x-Achse, an der y-Achse, am Ursprung)

Aufgabe 1.6 Es gibt genau eine Funktion, deren Graph symmetrisch zur x-Achse ist.

(a) Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?

(b) Warum gibt es keine weiteren Funktionen, deren Graphen symmetrisch zur x-Achse sind?

Aufgabe 1.6 Es gibt genau eine Funktion, deren Graph symmetrisch zur x-Achse ist.

(a) Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?

(b) Warum gibt es keine weiteren Funktionen, deren Graphen symmetrisch zur x-Achse sind?

Aufgabe 1.7 Untersuche die Graphen der folgenden Funktionen auf Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung.

(a) $f(x) = 4x + \sin(x)$ **(b)** $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

(c) $f(x) = 3^{-x} + 2^{2x}$ etc. etc.

Aufgabe 1.8 Gegeben sei die Funktion $f(x) = -(x-3)^2 + 1$.

(a) Untersuche den Graphen auf Symmetrie zur y-Achse.

(b) Besitzt dieser Graph eine Symmetrieachse? Welche?

Aufgabe 1.8 Gegeben sei die Funktion $f(x) = -(x-3)^2 + 1$.

(a) Untersuche den Graphen auf Symmetrie zur y-Achse.

(b) Besitzt dieser Graph eine Symmetrieachse? Welche?

Aufgabe 1.9 Gegeben sie die Funktion $f(x) = x^3 - x + 1$.

(a) Untersuche den Graphen auf Symmetrie zum Ursprung.

(b) Besitzt dieser Graph eine Punktsymmetrie? Zu welchem Punkt?

Aufgabe 1.8 Gegeben sei die Funktion $f(x) = -(x-3)^2 + 1$.

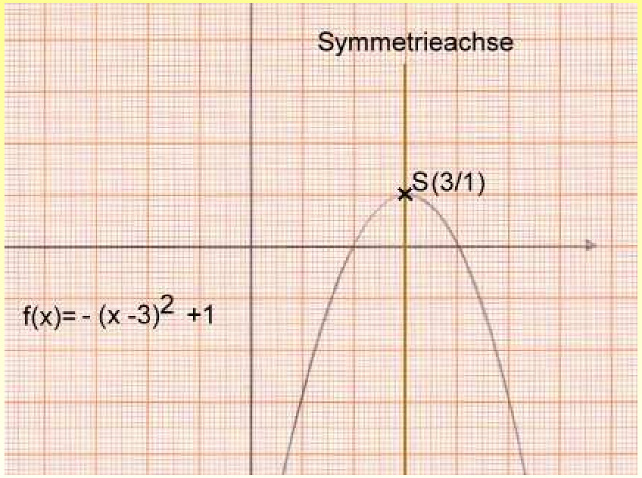
(a) Untersuche den Graphen auf Symmetrie zur y-Achse.

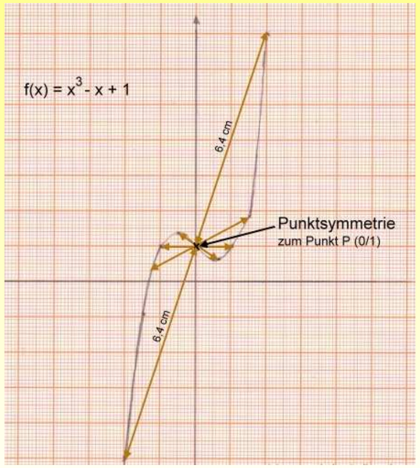
(b) Besitzt dieser Graph eine Symmetrieachse? Welche?

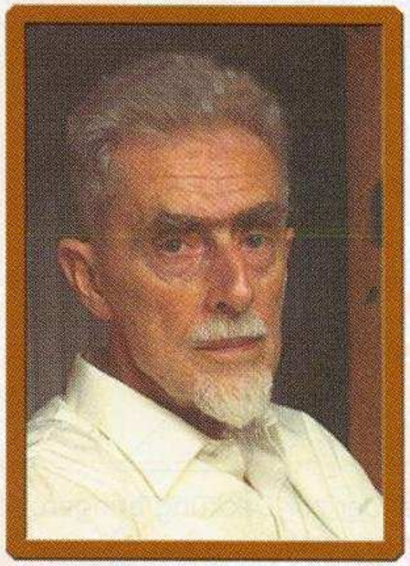
Aufgabe 1.9 Gegeben sie die Funktion $f(x) = x^3 - x + 1$.

(a) Untersuche den Graphen auf Symmetrie zum Ursprung.

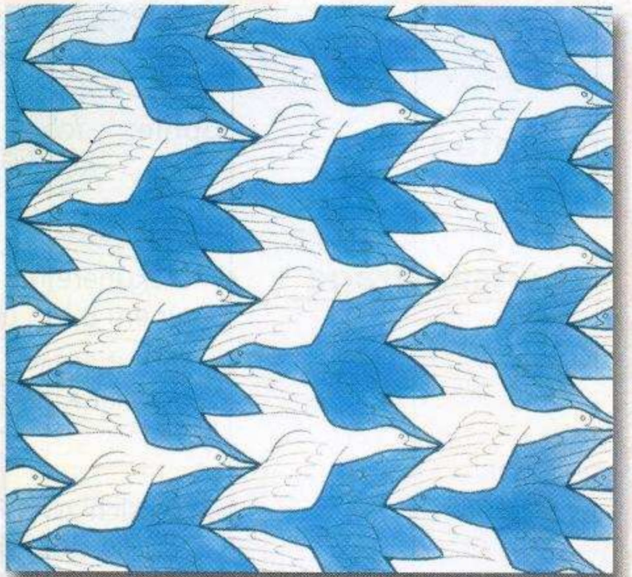
(b) Besitzt dieser Graph eine Punktsymmetrie? Zu welchem Punkt?





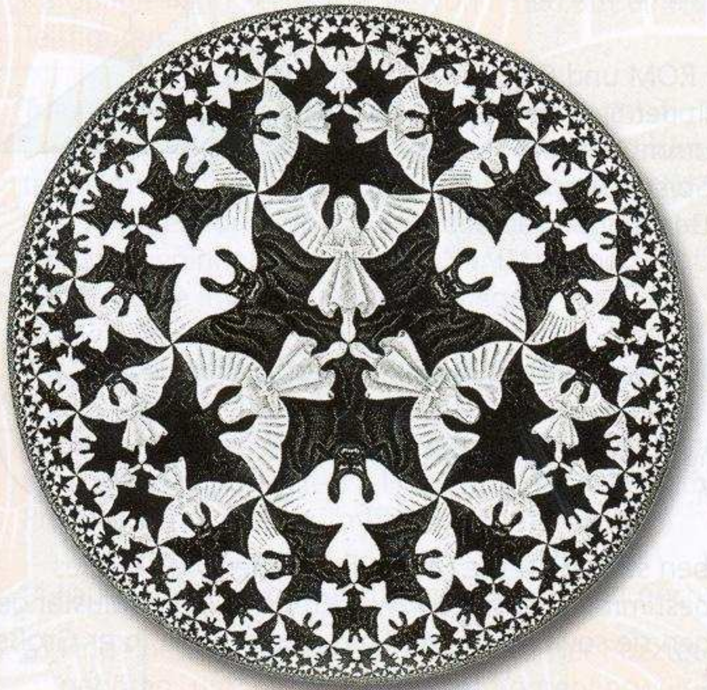


Maurits Cornelis Escher
geb. 1898 in Leeuwarden
gest. 1972 in Hilversum



Die Werke des niederländischen Künstlers **M. C. Escher** faszinieren durch Symmetrien und durch verblüffende Effekte, die meist auf mathematischen Prinzipien beruhen. Besonders stark interessierte Escher die regelmäßige Flächenaufteilung. Escher war durch Besuche in der Alhambra, dem Schloss der maurischen Herrscher in Granada, zur Beschäftigung mit regelmäßigen Figuren und Symmetrien angeregt worden.

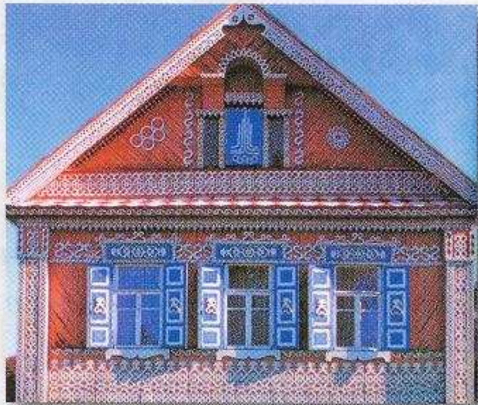
Eine regelmäßige Flächenaufteilung ist ein Puzzle aus kongruenten Figuren.
Dabei wird eine Grundfigur verschoben oder an einer Achse gespiegelt oder um einen Punkt gedreht. Es können auch mehrere dieser Bewegungen kombiniert werden.



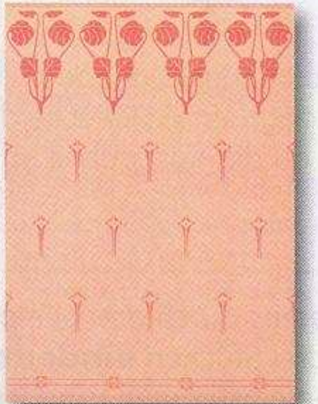
Kreislimit IV (1960)
Spiegelung

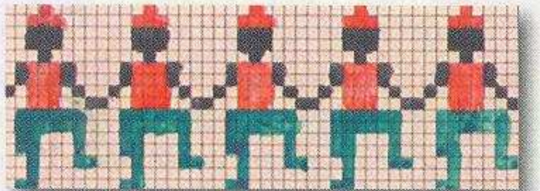
Schlangen (1969)
Drehung

An Gebäuden, an Fußböden und an Wänden findet man häufig Ornamente, bei denen sich kongruente Figuren in jeweils gleichen Abständen wiederholen.



Man spricht von einem **Bandornament**, wenn sich eine **Grundfigur** längs eines Streifens regelmäßig wiederholt. Sie wird dabei jeweils um gleich lange Strecken in der gleichen Richtung verschoben. Diese Grundfigur kann eine einfache geometrische Figur sein; sie kann aber auch eine kompliziertere Form haben.
Bandornamente finden sich z. B. auch an Schmuckstücken, als Bordüren von Vorhängen und Tischdecken und in Stickereien und Strickmustern.





2 – Symmetrie in Mathematik-Wettbewerben

Die Art und Weise wie kleine Kinder spielen
ähnelt überraschend stark der Art und Weise

2 – Symmetrie in Mathematik-Wettbewerben

Die Art und Weise wie kleine Kinder spielen ähnelt überraschend stark der Art und Weise wie Wissenschaftler arbeiten.

2 – Symmetrie in Mathematik-Wettbewerben

Die Art und Weise wie kleine Kinder spielen ähnelt überraschend stark der Art und Weise wie Wissenschaftler arbeiten.

Symmetrie ist auch eine elegante und kraftvolle **Beweismethode**. Neben der mathematischen Forschung kommt sie oft auch in mathematischen Schülerseminaren und -wettbewerben vor.

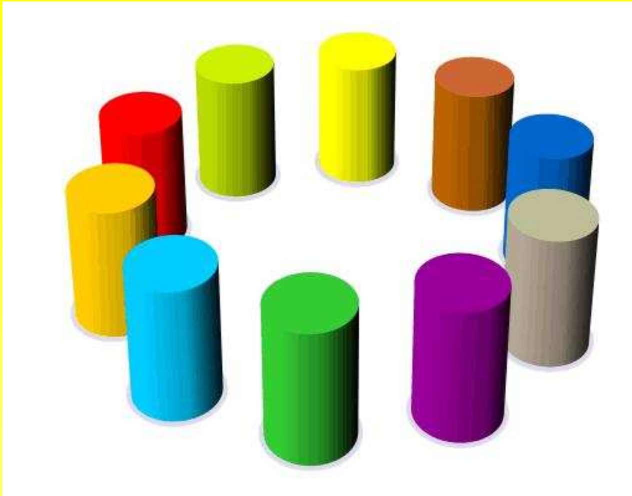
2 – Symmetrie in Mathematik-Wettbewerben

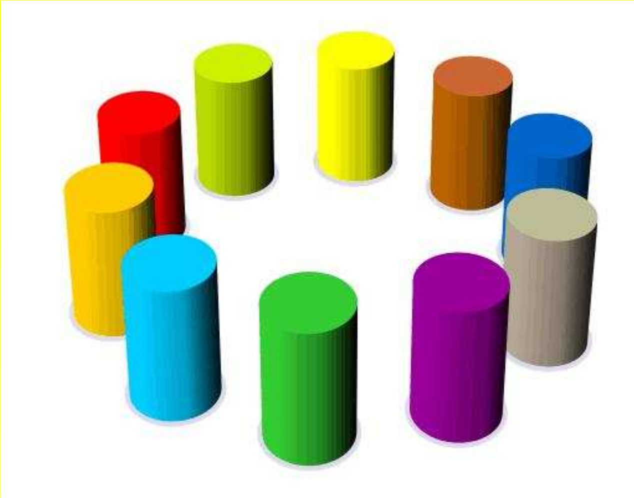
Die Art und Weise wie kleine Kinder spielen ähnelt überraschend stark der Art und Weise wie Wissenschaftler arbeiten.

Symmetrie ist auch eine elegante und kraftvolle **Beweismethode**. Neben der mathematischen Forschung kommt sie oft auch in mathematischen Schülerseminaren und -wettbewerben vor.

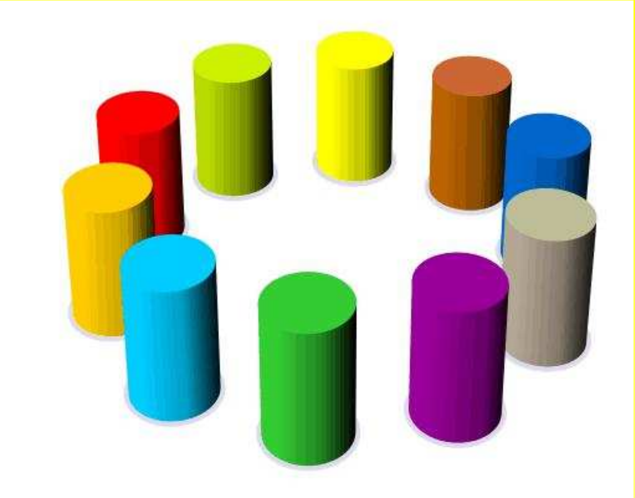
Aufgabe 2.1 (**Kreis-Nim**, aus: H. König, Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 – eine Anleitung für AG-Leiter, **Bezirkskomitee Chemnitz**)

Bei einem Spiel wird eine gerade Zahl von Holzspielsteinchen im Kreis angeordnet.





Die Spieler **A** und **B** nehmen abwechselnd entweder genau ein Holz oder genau zwei benachbarte Hölzer weg. (Zwei Hölzer heißen benachbart, wenn sie weder durch andere Hölzer noch durch entstandene Lücken getrennt werden.) Gewonnen hat der Spieler, der das letzte Hölzchen wegnimmt.



Die Spieler **A** und **B** nehmen abwechselnd entweder genau ein Holz oder genau zwei benachbarte Hölzer weg. (Zwei Hölzer heißen benachbart, wenn sie weder durch andere Hölzer noch durch entstandene Lücken getrennt werden.) Gewonnen hat der Spieler, der das letzte Hölzchen wegnimmt.

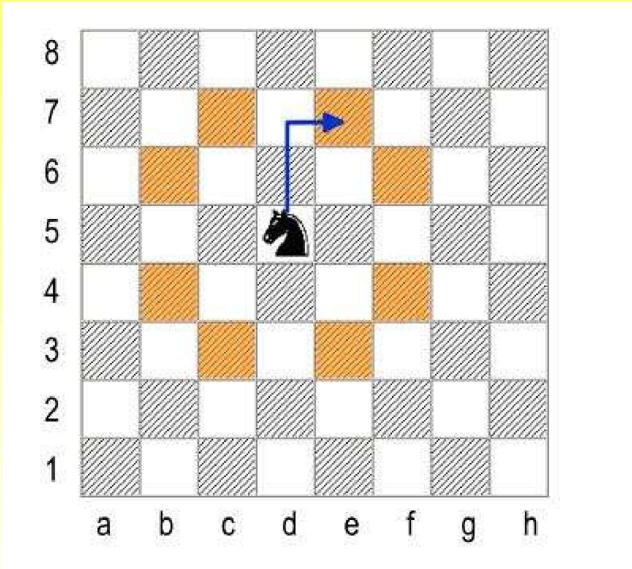
Wenn **A** beginnt, kann einer der beiden durch optimales Spiel immer den Sieg erzwingen?

Aufgabe 2.2 (Aus: A. Engel, Problem-Solving Strategies, Springer Verlag 1998)

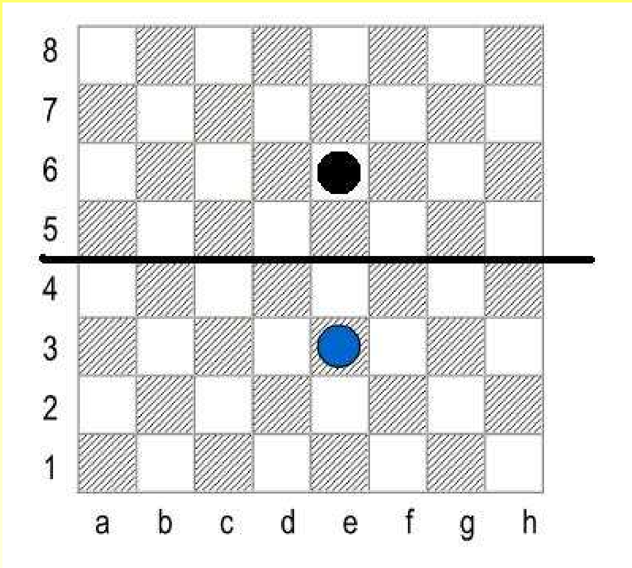
Zwei Spieler **A** und **B** setzen abwechselnd weiße und schwarze Schachspringer auf ein Schachbrett. Sie dürfen dabei nur unbesetzte Felder verwenden, die nicht von einem gegnerischen Springer bedroht sind. Kann einer der Spieler den Sieg erzwingen?

Aufgabe 2.2 (Aus: A. Engel, Problem-Solving Strategies, Springer Verlag 1998)

Zwei Spieler **A** und **B** setzen abwechselnd weiße und schwarze Schachspringer auf ein Schachbrett. Sie dürfen dabei nur unbesetzte Felder verwenden, die nicht von einem gegnerischen Springer bedroht sind. Kann einer der Spieler den Sieg erzwingen?



Lösung: Spieler **B** kann den Sieg erzwingen, indem er eine achsensymmetrische Strategie bzgl. der horizontalen Mittelachse (zwischen der 4. und 5. Reihe) wählt. Spieler **B** kann dabei nie gezwungen sein, auf ein bedrohtes Feld zu setzen, denn dann wäre das Feld, auf das **A** gesetzt hat, bereits bedroht gewesen.



3 – Symmetrie in der Linearen Algebra

Die Mathematik bietet Ordnung, Symmetrie
und Beschränkung auf das Wesentliche.

3 – Symmetrie in der Linearen Algebra

Die Mathematik bietet Ordnung, Symmetrie
und Beschränkung auf das Wesentliche.
Dies sind die höchsten Formen der Schönheit.
(Aristoteles, 384-322 v.Chr.)

3 – Symmetrie in der Linearen Algebra

Die Mathematik bietet Ordnung, Symmetrie
und Beschränkung auf das Wesentliche.
Dies sind die höchsten Formen der Schönheit.
(Aristoteles, 384-322 v.Chr.)

Im Folgenden beschreiben wir die **Zeichenebene** durch Einführung eines kartesischen Koordinatensystems mit $\mathbb{R}^2$.

Definition 3.1 Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ heißt **Isometrie**, wenn sie Längen erhält, d.h. wenn für alle $p, q \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\|\varphi(p) - \varphi(q)\| \;=\; \|p - q\|$$

Satz 3.2 *Sei* $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *eine Isometrie.*

(a) *Die Abbildung* φ *ist* **winkelerhaltend***.*

(b) *Die Abbildung* φ *erhält das* **Skalarprodukt***.*

Auf Grund dieser Eigenschaften heißen Isometrien von $\mathbb{R}^2$ auch **Bewegungen** oder **Kongruenzabbildungen**.

Satz 3.2 *Sei* $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *eine Isometrie.*

(a) *Die Abbildung* φ *ist* **winkelerhaltend**.

(b) *Die Abbildung* φ *erhält das* **Skalarprodukt**.

Auf Grund dieser Eigenschaften heißen Isometrien von $\mathbb{R}^2$ auch **Bewegungen** oder **Kongruenzabbildungen**.

Beweis: $\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\varphi)$

Satz 3.2 *Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Isometrie.*

(a) *Die Abbildung φ ist* **winkelerhaltend**.

(b) *Die Abbildung φ erhält das* **Skalarprodukt**.

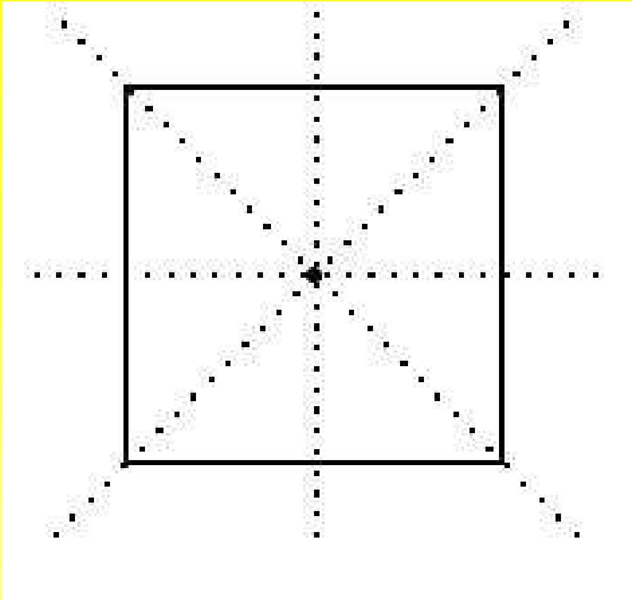
Auf Grund dieser Eigenschaften heißen Isometrien von $\mathbb{R}^2$ auch **Bewegungen** oder **Kongruenzabbildungen**.

Beweis: $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\varphi)$

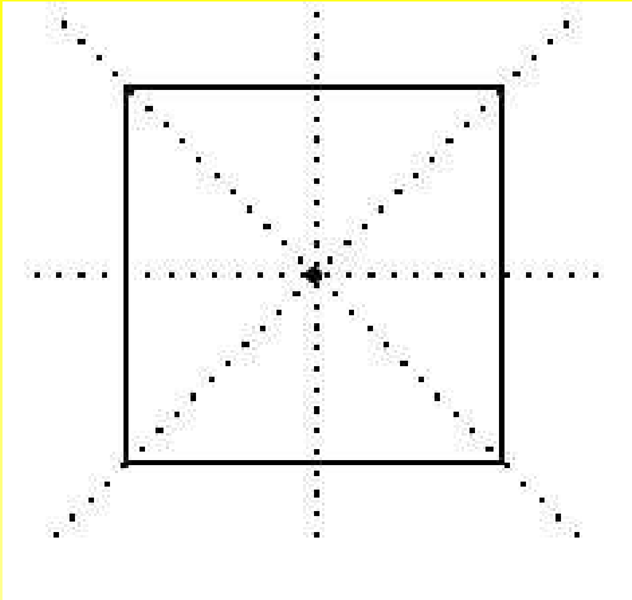
Definition 3.3 Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Eine Isometrie $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ heißt eine **Symmetrie** von M, wenn $\varphi(M) = M$ gilt.

Die Menge aller Symmetrien von M wird mit $\mathrm{Sym}(M)$ bezeichnet und heißt die **Symmetriegruppe** von M.

Beispiel 3.4 (Die Symmetrien des Quadrats)



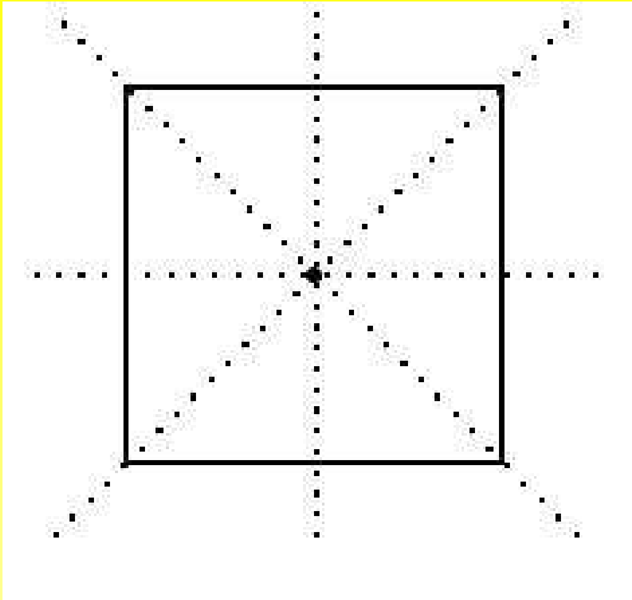
Beispiel 3.4 **(Die Symmetrien des Quadrats)**



Es gibt insgesamt 8 Symmetrien:

σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 Spiegelungen an den 4 Achsen

Beispiel 3.4 **(Die Symmetrien des Quadrats)**



Es gibt insgesamt 8 Symmetrien:

σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 Spiegelungen an den 4 Achsen

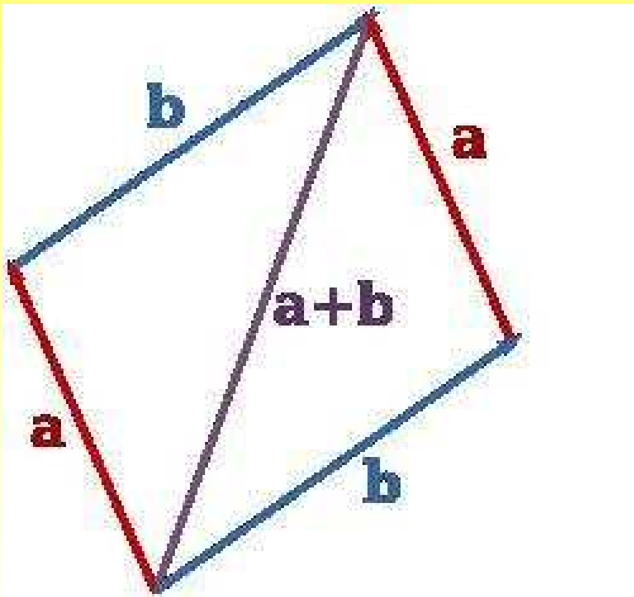
ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. ϱ_4 Drehungen um 0°, 90°, 180°, 270°

Dabei ist ϱ_1 die **identische Abbildung** und ϱ_3 die Punktspiegelung am Mittelpunkt.

Satz 3.5 *Jede Isometrie* $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *ist von der Form* $\varphi = \tau \circ \psi$ *mit einer Translation* τ *(um den Vektor* $\varphi(0)$*) und einer* **orthogonalen linearen Abbildung** ψ.

Satz 3.5 *Jede Isometrie* $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *ist von der Form* $\varphi = \tau \circ \psi$ *mit einer Translation* τ *(um den Vektor* $\varphi(0)$*) und einer* **orthogonalen linearen Abbildung** ψ.

Beweis: Sei τ die Verschiebung um $\varphi(0)$. Dann ist $\psi = \tau^{-1} \circ \varphi$ eine Isometrie mit $\varphi(0) = 0$. Da ψ Parallelogramme erhält, ist ψ mit Summen verträglich. Nun zeigt man die Linearität von ψ.



Satz 3.6 *Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine orthogonale lineare Abbildung.*

(a) *Die Matrix $\mathcal{A}$ von ψ erfüllt $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{\mathrm{tr}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.*

(b) *Es gibt einen Winkel α so dass gilt:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall ist ψ eine Drehung um α, im zweiten eine Spiegelung an der Geraden im Winkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x-Achse.

Folgerung: Die Kongruenzabbildungen des $\mathbb{R}^2$ sind: Verschiebungen, Drehungen (um einen beliebigen Punkt), Spiegelungen oder **Gleitspiegelungen** (also Zusammensetzungen von Spiegelungen und anschließenden Verschiebungen).

Der folgende Satz wurde von **Leonardo da Vinci** (1452–1519) bewiesen.

Satz 3.7 *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^2$ habe nur endlich viele Symmetrien. Dann ist $\mathrm{Sym}(M)$ von einem der folgenden Typen:*

(a) $\mathrm{Sym}(M) = \{\mathrm{id}, \varrho, \varrho^2, \ldots, \ldots, \varrho^{n-1}\}$

(b) $\mathrm{Sym}(M) = \{\mathrm{id}, \varrho, \varrho^2, \ldots, \ldots, \varrho^{n-1}, \sigma, \sigma\,\varrho, \ldots, \sigma\,\varrho^{n-1}\}$

jeweils mit $n \geq 1$, einer Drehung ϱ um $360^\circ/n$ und ggf. einer Spiegelung σ an einer Achse durch das Drehzentrum.

Der folgende Satz wurde von **Leonardo da Vinci** (1452–1519) bewiesen.

Satz 3.7 *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^2$ habe nur endlich viele Symmetrien. Dann ist* $\mathrm{Sym}(M)$ *von einem der folgenden Typen:*

(a) $\mathrm{Sym}(M) = \{\mathrm{id}, \varrho, \varrho^2, \ldots, \ldots, \varrho^{n-1}\}$

(b) $\mathrm{Sym}(M) = \{\mathrm{id}, \varrho, \varrho^2, \ldots, \ldots, \varrho^{n-1}, \sigma, \sigma\,\varrho, \ldots, \sigma\,\varrho^{n-1}\}$

jeweils mit $n \geq 1$, einer Drehung ϱ um $360°/n$ und ggf. einer Spiegelung σ an einer Achse durch das Drehzentrum.

Beweisschritte: **(1)** Eine endliche Symmetriegruppe enthält keine echten Translationen oder Gleitspiegelungen.

Der folgende Satz wurde von **Leonardo da Vinci** (1452–1519) bewiesen.

Satz 3.7 *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^2$ habe nur endlich viele Symmetrien. Dann ist* $\mathrm{Sym}(M)$ *von einem der folgenden Typen:*

(a) $\mathrm{Sym}(M) = \{\mathrm{id}, \varrho, \varrho^2, \dots, \dots, \varrho^{n-1}\}$

(b) $\mathrm{Sym}(M) = \{\mathrm{id}, \varrho, \varrho^2, \dots, \dots, \varrho^{n-1}, \sigma, \sigma\,\varrho, \dots, \sigma\,\varrho^{n-1}\}$

jeweils mit $n \geq 1$, einer Drehung ϱ um $360°/n$ und ggf. einer Spiegelung σ an einer Achse durch das Drehzentrum.

Beweisschritte: **(1)** Eine endliche Symmetriegruppe enthält keine echten Translationen oder Gleitspiegelungen.

(2) Sie enthält entweder nur Drehungen oder gleich viele Drehungen und Spiegelungen.

(3) Alle Drehungen haben dasselbe Drehzentrum.

(4) Gibt es Spiegelungen, so schneiden sich alle Spiegelachsen im Drehzentrum.

(3) Alle Drehungen haben dasselbe Drehzentrum.

(4) Gibt es Spiegelungen, so schneiden sich alle Spiegelachsen im Drehzentrum.

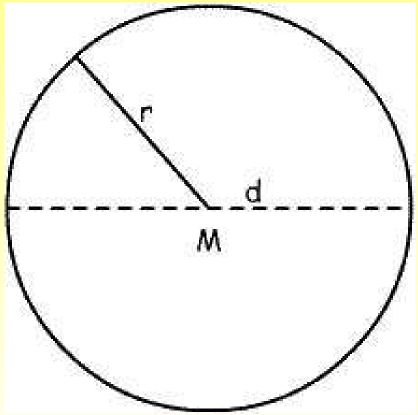
(5) Die Drehwinkel bilden eine Menge der Form $\{0°, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ mit $\alpha = 360°/n$.

(3) Alle Drehungen haben dasselbe Drehzentrum.

(4) Gibt es Spiegelungen, so schneiden sich alle Spiegelachsen im Drehzentrum.

(5) Die Drehwinkel bilden eine Menge der Form $\{0°, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ mit $\alpha = 360°/n$.

Beispiel 3.8 Ein Kreis besitzt eine unendliche Symmetriegruppe, nämlich die Menge aller Drehungen um den Kreismittelpunkt sowie alle Spiegelungen an Achsen durch den Kreismittelpunkt.



4 – Symmetrie in der Algebra

Ich denke, also bin ich.

(René Descartes)

4 – Symmetrie in der Algebra

Ich denke, also bin ich.

(René Descartes)

Denken und sein werden vom Widerspruch bestimmt.

(Aristoteles)

4 – Symmetrie in der Algebra

Ich denke, also bin ich.

(René Descartes)

Denken und sein werden vom Widerspruch bestimmt.

(Aristoteles)

Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Die Menge $\mathrm{Sym}(M)$ bildet bzgl. der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine **Gruppe**, d.h.

(a) es gilt das **Assoziativgesetz** $(\varrho \circ \sigma) \circ \tau = \varrho \circ (\sigma \circ \tau)$

(b) es gibt ein neutrales Element, die **Identität**, und

(c) zu jedem Element φ ist auch die **Umkehrabbildung** φ^{-1} eine Symmetrie von M.

Klassifikation der Symmetriegruppen

Mit Hilfe der Linearen Algebra und der **Gruppentheorie** kann man die möglichen Symmetriegruppen einer Teilmenge M der Ebene $\mathbb{R}^2$ bestimmen.

Klassifikation der Symmetriegruppen

Mit Hilfe der Linearen Algebra und der **Gruppentheorie** kann man die möglichen Symmetriegruppen einer Teilmenge M der Ebene $\mathbb{R}^2$ bestimmen.

Der **Satz von Leonardo** besagt, dass als endliche Symmetriegruppe nur eine **zyklische Gruppe** $C_n \ = \ \{\mathrm{id},\ \varrho,\ \ldots,\ \varrho^{n-1}\}$ oder eine **Diedergruppe** $D_N \ = \ \{\mathrm{id}, \varrho, \varrho^2, \ldots, \ldots, \varrho^{n-1}, \sigma, \sigma\, \varrho, \ldots, \sigma\, \varrho^{n-1}\}$ vorkommen kann.

Klassifikation der Symmetriegruppen

Mit Hilfe der Linearen Algebra und der **Gruppentheorie** kann man die möglichen Symmetriegruppen einer Teilmenge M der Ebene $\mathbb{R}^2$ bestimmen.

Der **Satz von Leonardo** besagt, dass als endliche Symmetriegruppe nur eine **zyklische Gruppe** $C_n = \{\mathrm{id},\ \varrho,\ \ldots,\ \varrho^{n-1}\}$ oder eine **Diedergruppe** $D_N = \{\mathrm{id}, \varrho, \varrho^2, \ldots, \ldots, \varrho^{n-1}, \sigma, \sigma\,\varrho, \ldots, \sigma\,\varrho^{n-1}\}$ vorkommen kann.

Definition 4.1 Eine Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(M)$ heißt **diskret**, wenn es eine untere Schranke gibt für die Längen ihrer Verschiebungsvektoren und ihre Drehwinkel.

Für eine diskrete Gruppe $\mathrm{Sym}(M)$ gibt es drei Fälle:

Für eine diskrete Gruppe $\mathrm{Sym}(M)$ gibt es drei Fälle:

(a) Enthält $\mathrm{Sym}(M)$ keine Verschiebungen, so ist $\mathrm{Sym}(M)$ endlich, also $\mathrm{Sym}(M) \cong C_n$ oder $\mathrm{Sym}(M) \cong D_n$ für ein $n \geq 1$.

Für eine diskrete Gruppe $\mathrm{Sym}(M)$ gibt es drei Fälle:

(a) Enthält $\mathrm{Sym}(M)$ keine Verschiebungen, so ist $\mathrm{Sym}(M)$ endlich, also $\mathrm{Sym}(M) \cong C_n$ oder $\mathrm{Sym}(M) \cong D_n$ für ein $n \geq 1$.

(b) Gehen alle Verschiebungen in $\mathrm{Sym}(M)$ in eine Richtung, so heißt M ein **Fries** oder ein **Bandornament** und $\mathrm{Sym}(M)$ heißt eine **Friesgruppe**.

Für eine diskrete Gruppe $\mathrm{Sym}(M)$ gibt es drei Fälle:

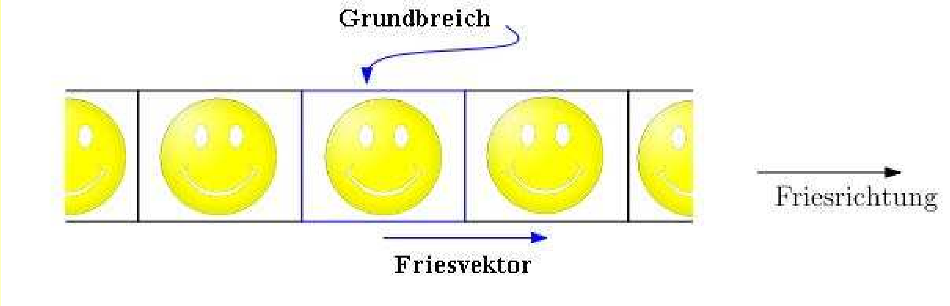
(a) Enthält $\mathrm{Sym}(M)$ keine Verschiebungen, so ist $\mathrm{Sym}(M)$ endlich, also $\mathrm{Sym}(M) \cong C_n$ oder $\mathrm{Sym}(M) \cong D_n$ für ein $n \geq 1$.

(b) Gehen alle Verschiebungen in $\mathrm{Sym}(M)$ in eine Richtung, so heißt M ein **Fries** oder ein **Bandornament** und $\mathrm{Sym}(M)$ heißt eine **Friesgruppe**.

Gibt es in $\mathrm{Sym}(M)$ zwei verschiedene Verschiebungsrichtungen, so heißt M eine **Pflasterung** (oder **Parkettierung**) der Ebene und $\mathrm{Sym}(M)$ heißt eine **Ornamentgruppe** oder **ebene kristallographische Gruppe**.

Friesgruppen

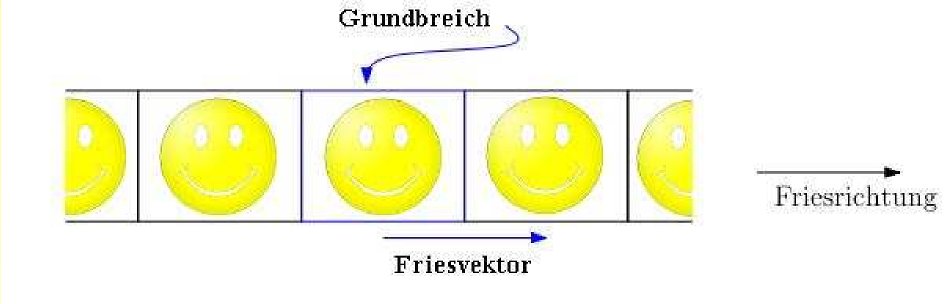
Ein Fries hat einen **Grundbereich** und einen **Friesvektor**.



Es gibt (bis auf Isomorphie) genau 7 Friesgruppen.

Friesgruppen

Ein Fries hat einen **Grundbereich** und einen **Friesvektor**.



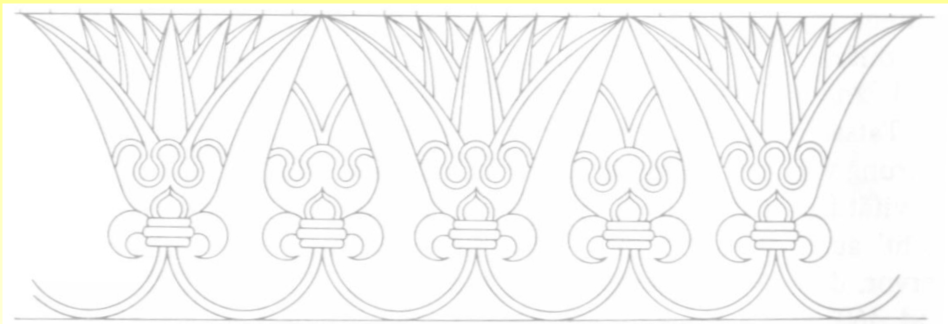
Es gibt (bis auf Isomorphie) genau 7 Friesgruppen.

Gruppe F1: Es gibt nur Verschiebungen.

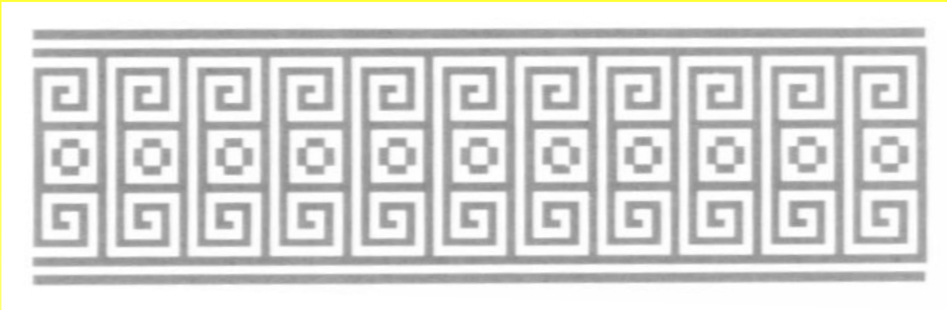
Gruppe F2: Verschiebungen und Punktspiegelungen

Gruppe F2: Verschiebungen und Punktspiegelungen

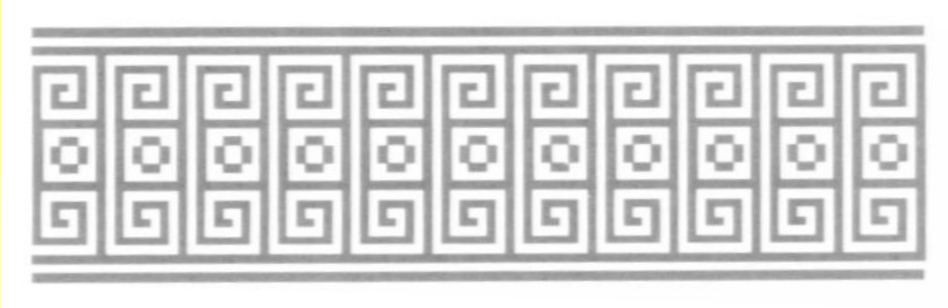
Gruppe F3: Verschiebungen und Spiegelungen an Achsen senkrecht zum Friesvektor



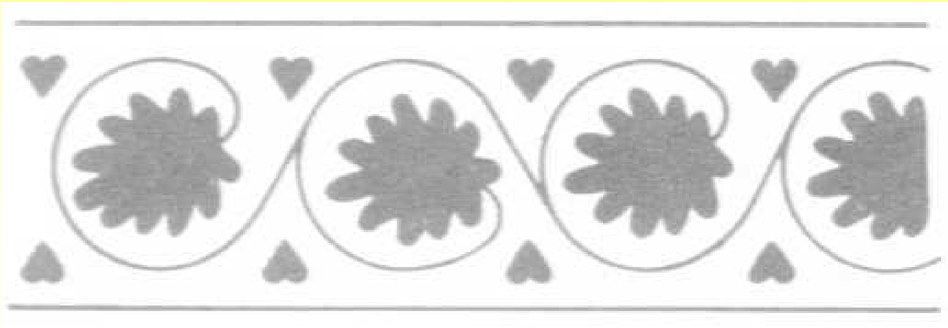
Gruppe F41: Verschiebungen und Spiegelungen an Achsen in Richtung des Friesvektors



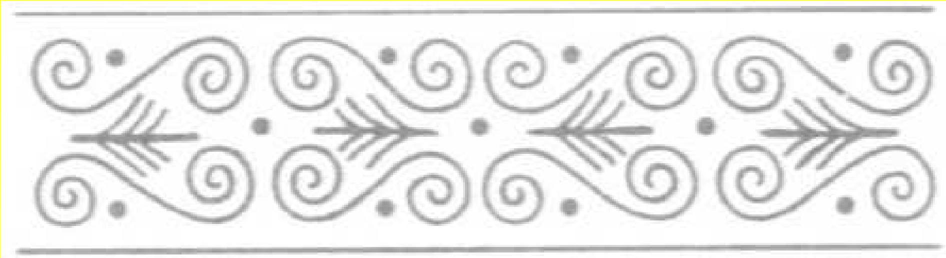
Gruppe F41: Verschiebungen und Spiegelungen an Achsen in Richtung des Friesvektors



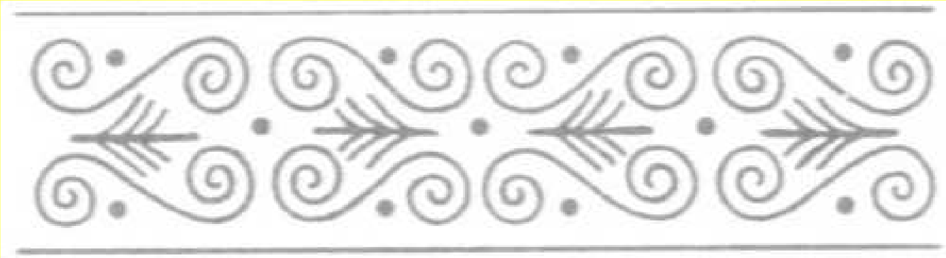
Gruppe F42: Verschiebungen und Gleitspiegelungen in Richtung des Friesvektors



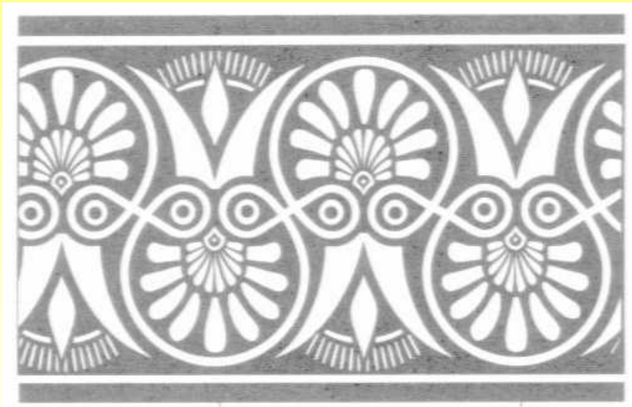
Gruppe F51: Verschiebungen, Punktspiegelungen und Spiegelungen an Achsen sowohl senkrecht als auch parallel zum Friesvektor



Gruppe F51: Verschiebungen, Punktspiegelungen und Spiegelungen an Achsen sowohl senkrecht als auch parallel zum Friesvektor



Gruppe F52: Verschiebungen, Punktspiegelungen, Spiegelungen an senkrechten Achsen und Gleitspiegelungen parallel zum Friesvektor



Beweisidee der Klassifikation der Friesgruppen

Beweisidee der Klassifikation der Friesgruppen

(1) Alle Verschiebungsvektoren v in der Friesgruppe G sind ganzzahlige Vielfache des Friesvektors v_G.

Beweisidee der Klassifikation der Friesgruppen

(1) Alle Verschiebungsvektoren v in der Friesgruppe G sind ganzzahlige Vielfache des Friesvektors v_G.

(2) Jedes Element $\varphi \in G$ ist von der Form $\varphi(x) = v + \ell(x)$ mit einer linearen Isometrie ℓ.

Beweisidee der Klassifikation der Friesgruppen

(1) Alle Verschiebungsvektoren v in der Friesgruppe G sind ganzzahlige Vielfache des Friesvektors v_G.

(2) Jedes Element $\varphi \in G$ ist von der Form $\varphi(x) = v + \ell(x)$ mit einer linearen Isometrie ℓ.

(3) Es gilt $\ell(v_G) = \pm v_G$ und auch ein zu v_G senkrechter Vektor w_G erfüllt $\ell(w_G) = \pm w_G$.

Beweisidee der Klassifikation der Friesgruppen

(1) Alle Verschiebungsvektoren v in der Friesgruppe G sind ganzzahlige Vielfache des Friesvektors v_G.

(2) Jedes Element $\varphi \in G$ ist von der Form $\varphi(x) = v + \ell(x)$ mit einer linearen Isometrie ℓ.

(3) Es gilt $\ell(v_G) = \pm v_G$ und auch ein zu v_G senkrechter Vektor w_G erfüllt $\ell(w_G) = \pm w_G$.

(4) Nun kann man alle möglichen ℓ herausfinden.

Ornamentgruppen

Es gibt bis auf Isomorphie genau 17 Ornamentgruppen.

Alle 17 Symmetriegruppen kommen in den Ornamenten in der **Alhambra** in Spanien vor.

Jedes Ornament hat einen Grundbereich und zwei Richtungsvektoren.

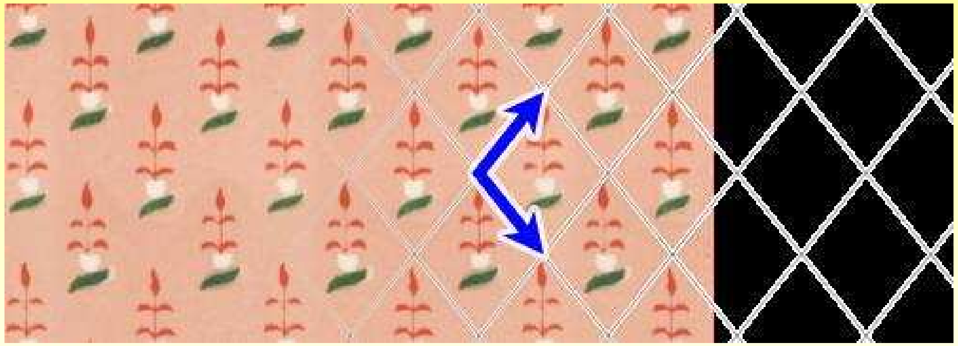
Ornamentgruppen

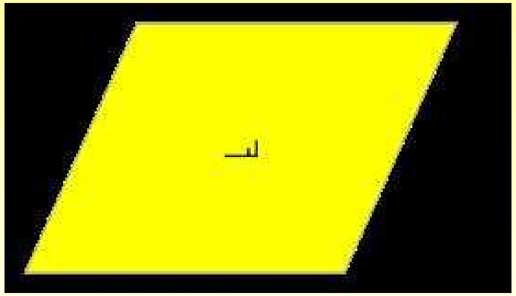
Es gibt bis auf Isomorphie genau 17 Ornamentgruppen.

Alle 17 Symmetriegruppen kommen in den Ornamenten in der **Alhambra** in Spanien vor.

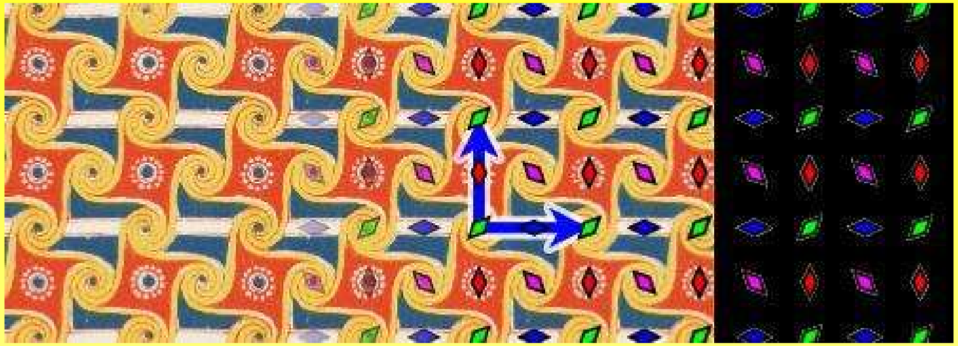
Jedes Ornament hat einen Grundbereich und zwei Richtungsvektoren.

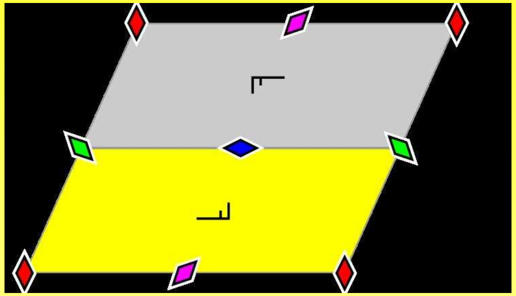
Gruppe p1: Grundbereich Parallelogramm, nur Verschiebungen



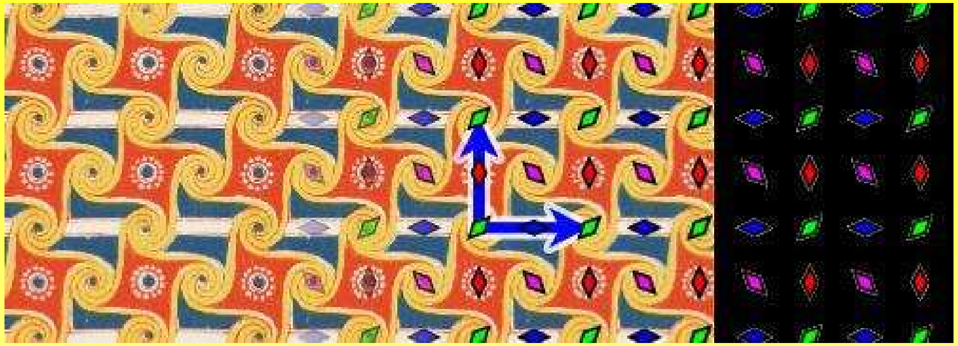
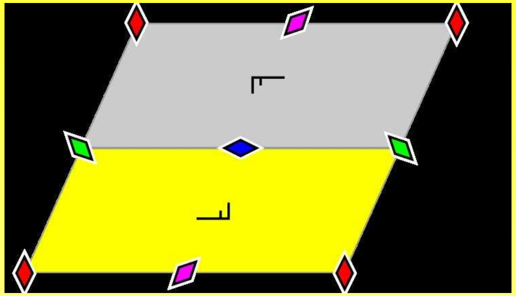


Gruppe p2: Grundbereich Parallelogramm, Verschiebungen und Punktspiegelungen

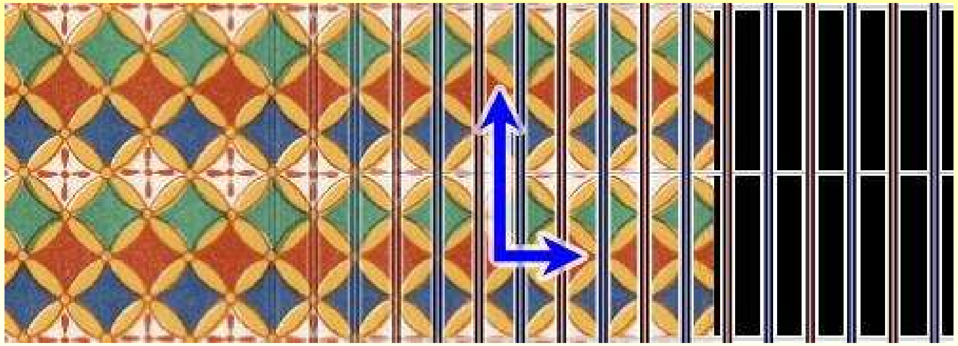
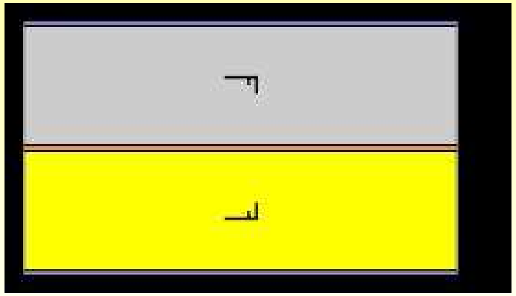




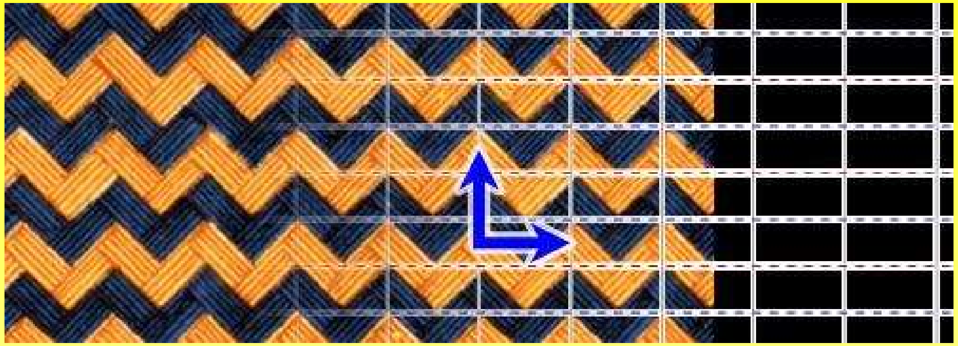
Gruppe p2: Grundbereich Parallelogramm, Verschiebungen und Punktspiegelungen

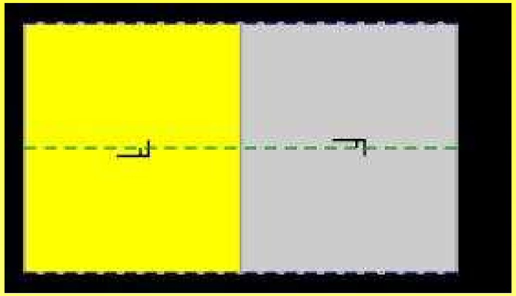



Gruppe pm: Grundbereich Rechteck, Verschiebungen und Spiegelungen an parallelen Achsen

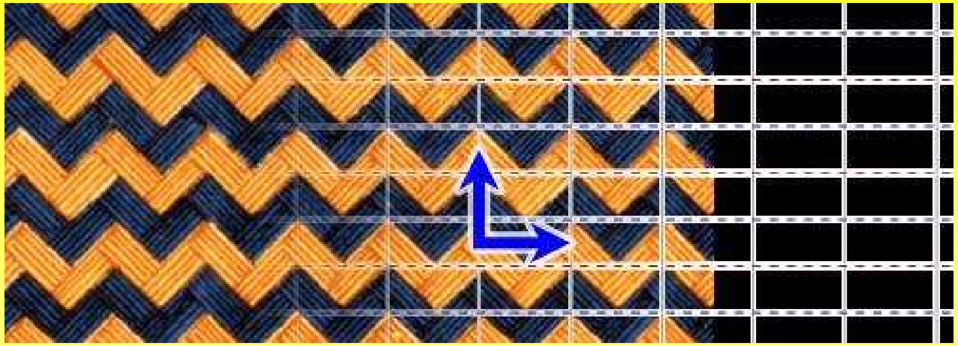



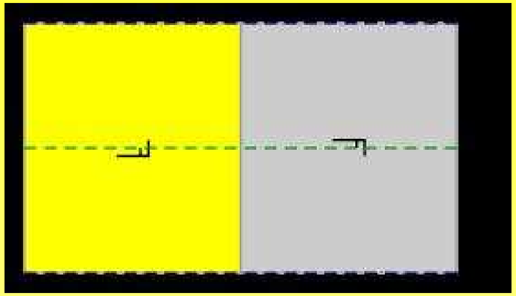
Gruppe pg: Grundbereich Rechteck, Verschiebungen und Gleitspiegelungen an parallelen Achsen



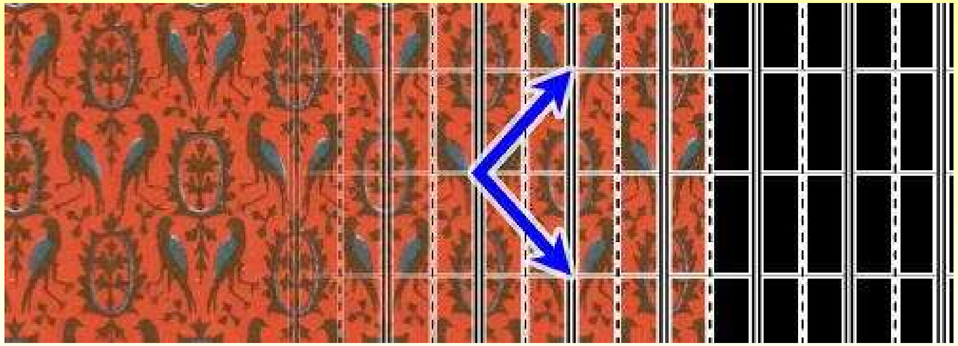


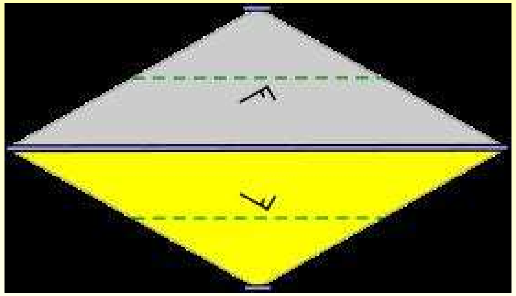
Gruppe pg: Grundbereich Rechteck, Verschiebungen und Gleitspiegelungen an parallelen Achsen



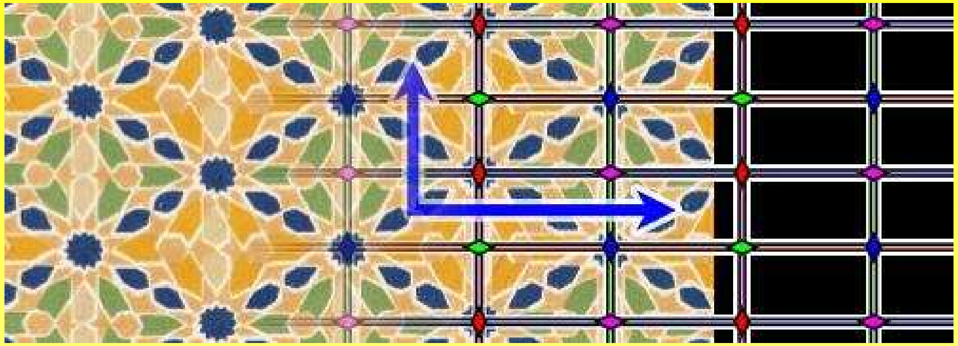


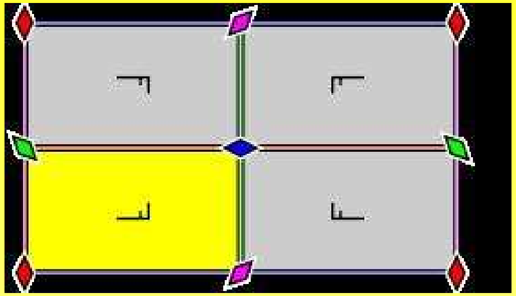
Gruppe cm: Grundbereich Raute, Spiegelungen und Gleitspiegelungen an abwechselnden Achsen



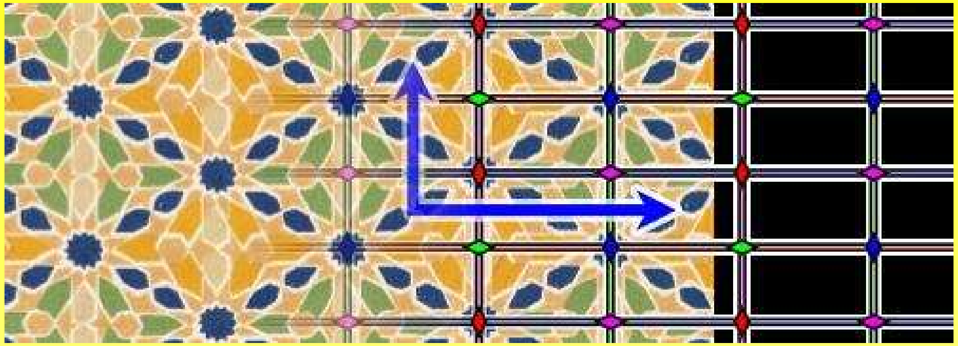


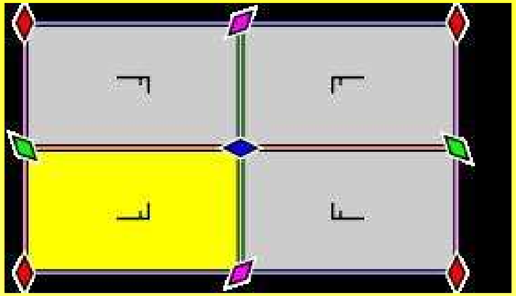
Gruppe pmm: Grundbereich Rechteck, Spiegelungen an zueinander senkrechten Achsen



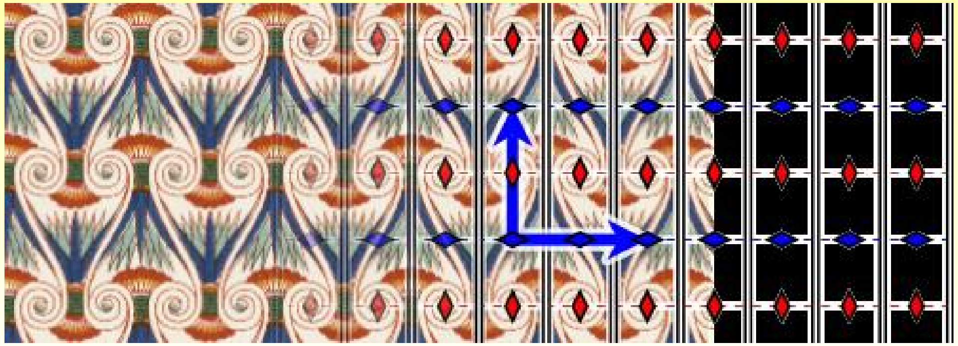


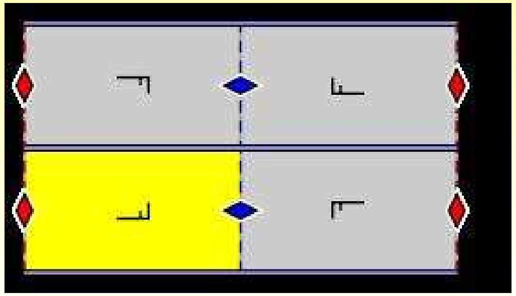
Gruppe pmm: Grundbereich Rechteck, Spiegelungen an zueinander senkrechten Achsen



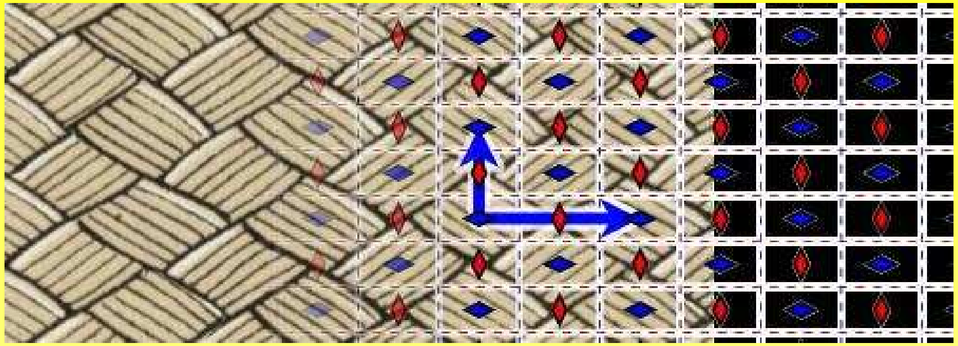


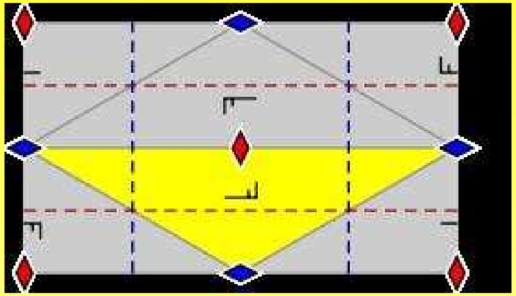
Gruppe pmg: Grundbereich Rechteck, Spiegelungen mit Achsen in einer Richtung und Gleitspiegelungen mit Achsen in der anderen Richtung



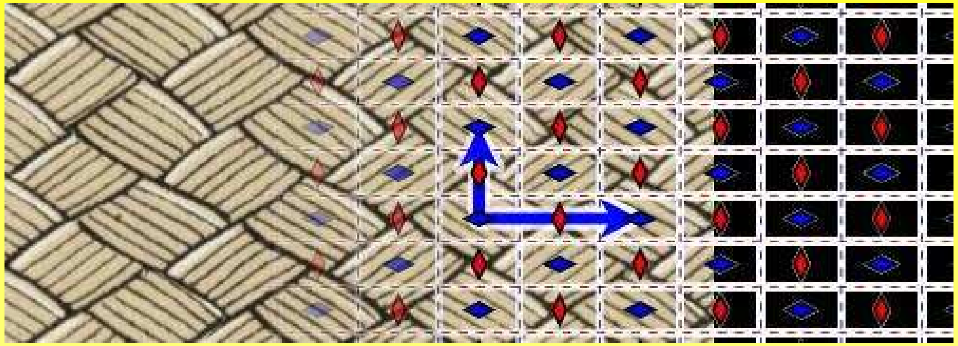


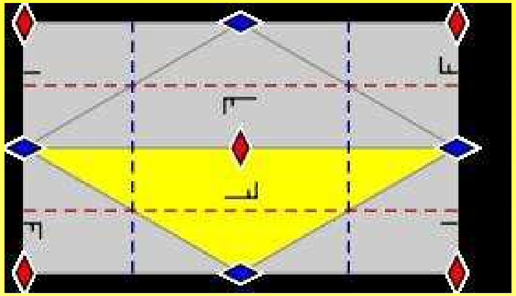
Gruppe pgg: Grundbereich Rechteck, Gleitspiegelungen an zueinander senkrechten Achsen



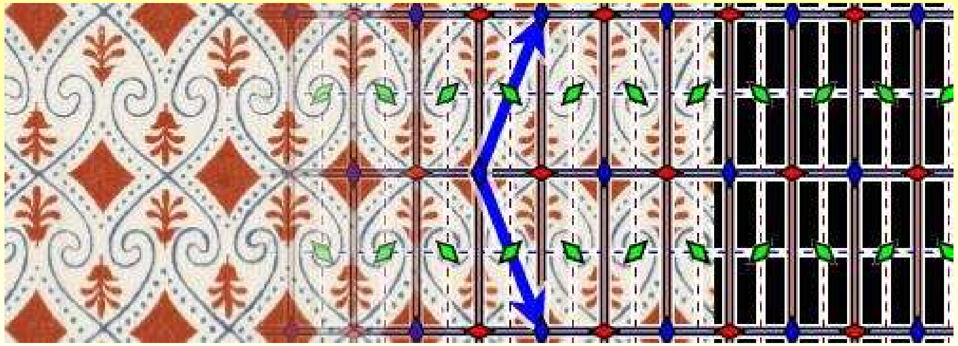


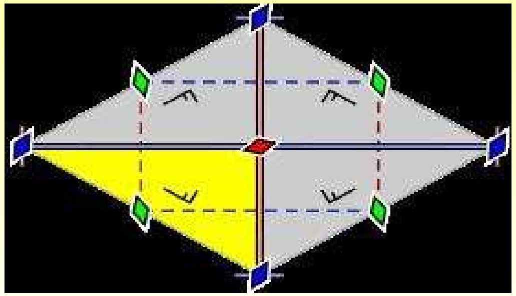
Gruppe pgg: Grundbereich Rechteck, Gleitspiegelungen an zueinander senkrechten Achsen



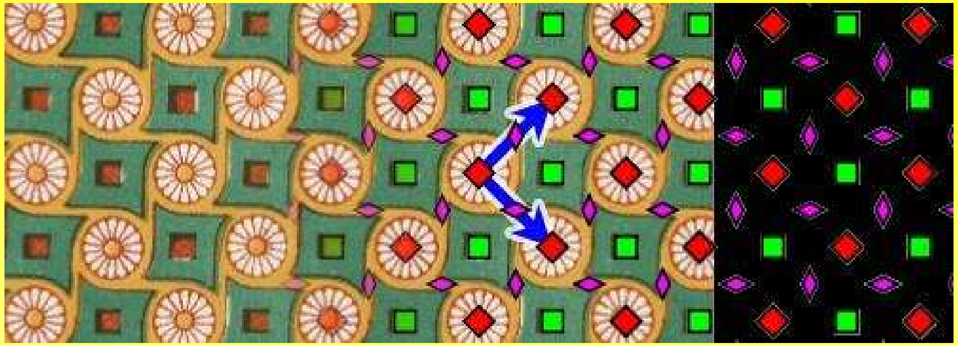
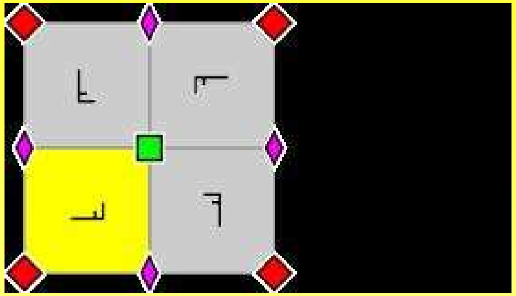


Gruppe cmm: Grundbereich Raute, Spiegelungen und Gleitspiegelungen an jeweils zueinander senkrechten Achsen

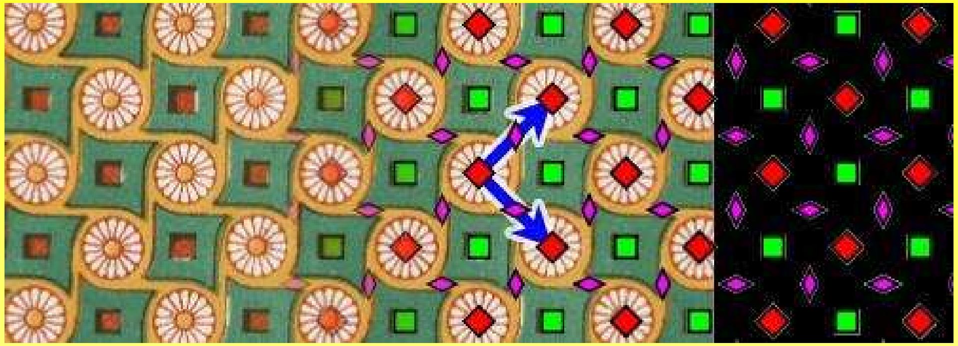


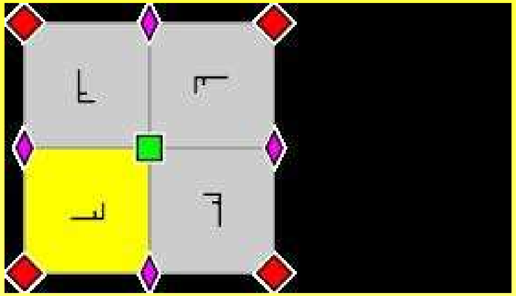


Gruppe p4: Grundbereich Quadrat, Verschiebungen und 90°-Drehungen

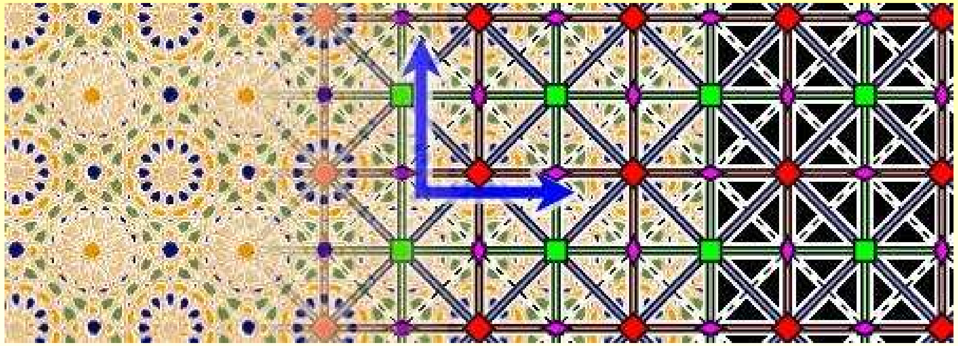
 

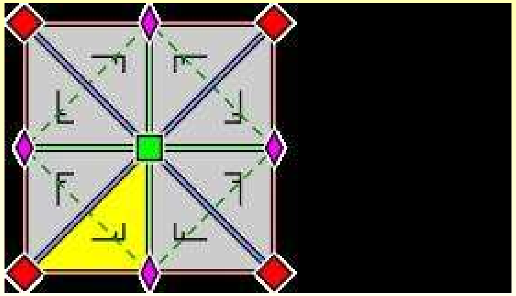
Gruppe p4: Grundbereich Quadrat, Verschiebungen und 90°-Drehungen



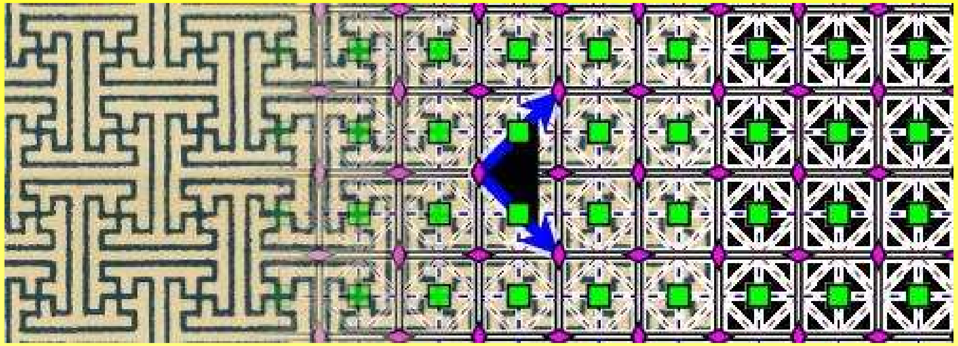


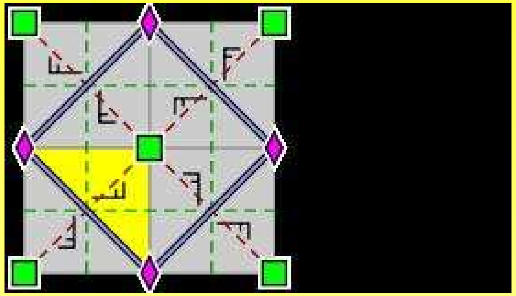
Gruppe p4m: Grundbereich Quadrat, Verschiebungen, 90°-Drehungen und Spiegelungen mit Achsen in 4 Richtungen



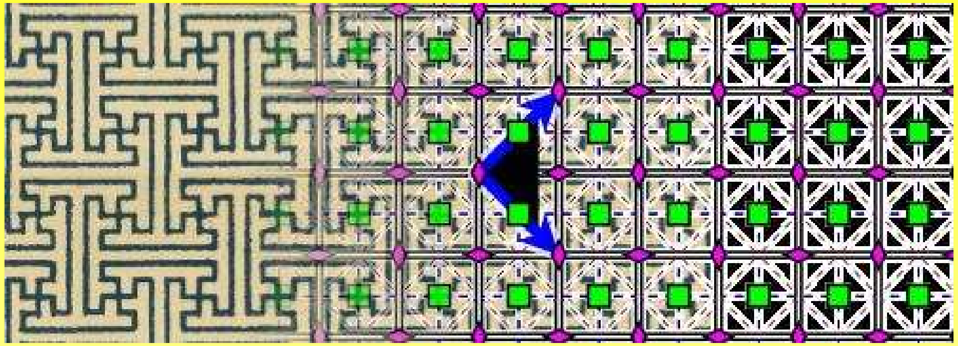


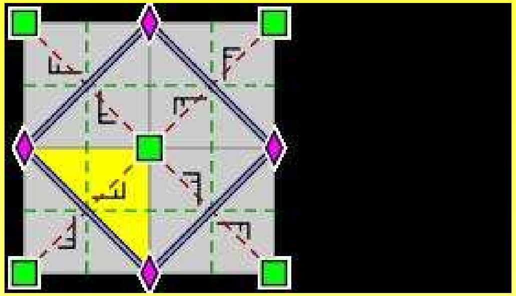
Gruppe p4g: Grundbereich Quadrat, Verschiebungen und 90°-Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen mit diagonalen Achsen



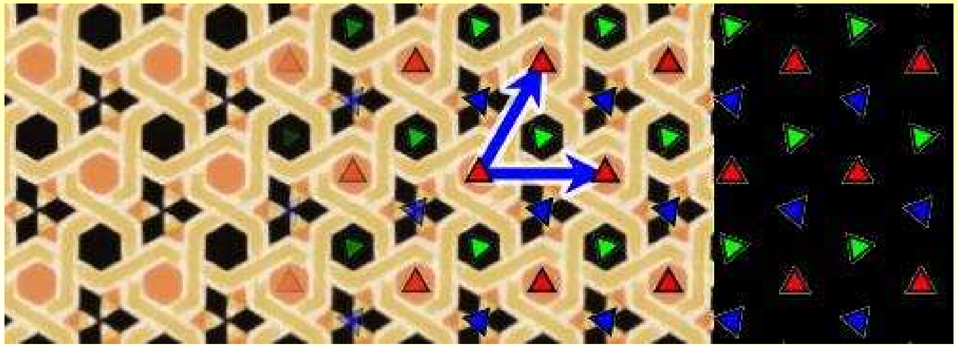


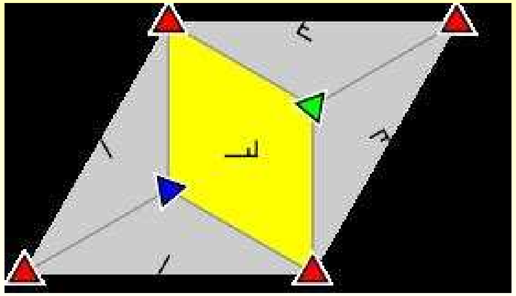
Gruppe p4g: Grundbereich Quadrat, Verschiebungen und 90°-Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen mit diagonalen Achsen



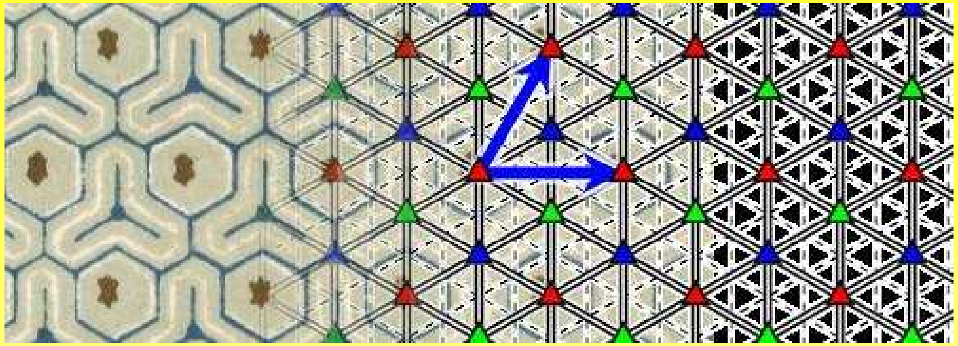


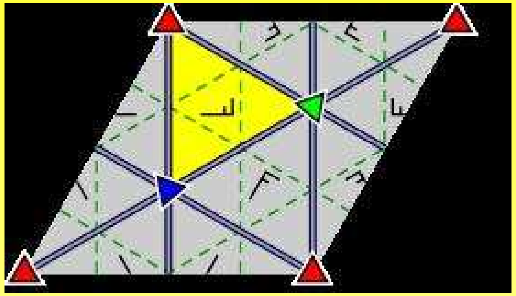
Gruppe p3: Grundbereich 60°-Raute, Verschiebungen und 120°-Drehungen



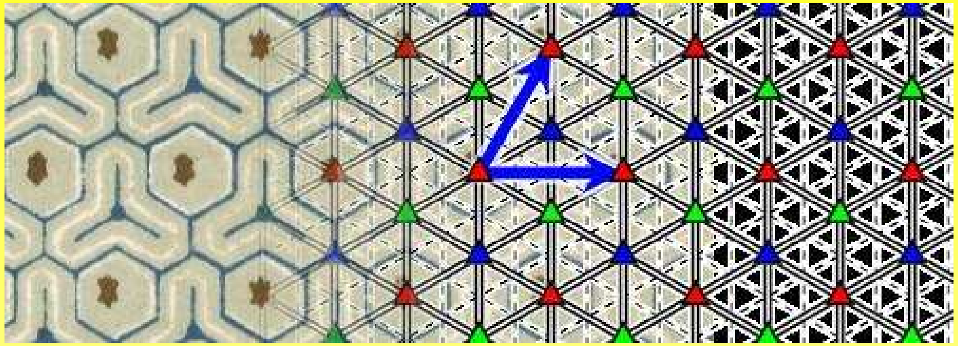


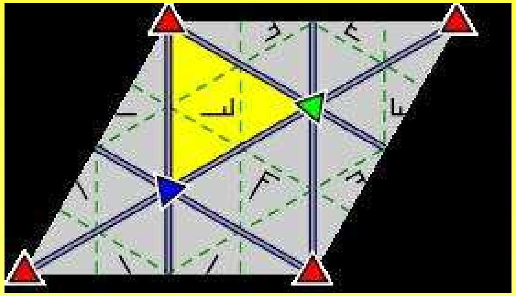
Gruppe p3m1: Grundbereich 60°-Raute, 120°-Drehungen, Spiegelungen mit Achsen durch die Drehzentren



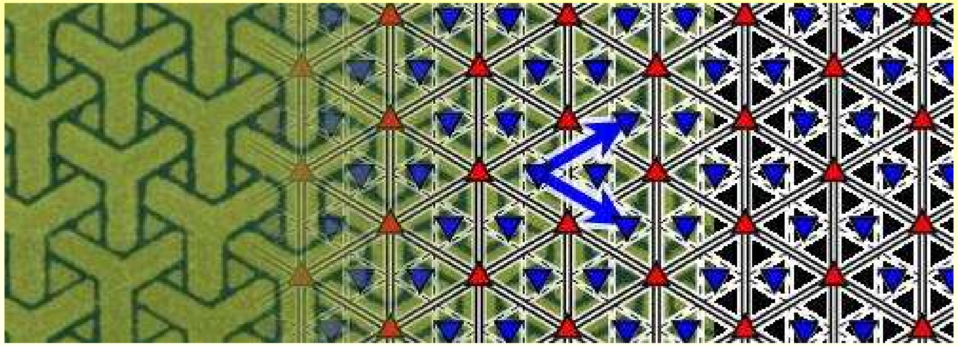


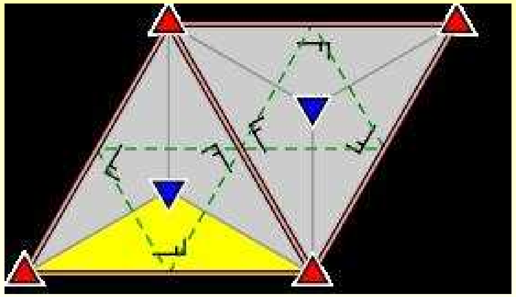
Gruppe p3m1: Grundbereich 60°-Raute, 120°-Drehungen, Spiegelungen mit Achsen durch die Drehzentren



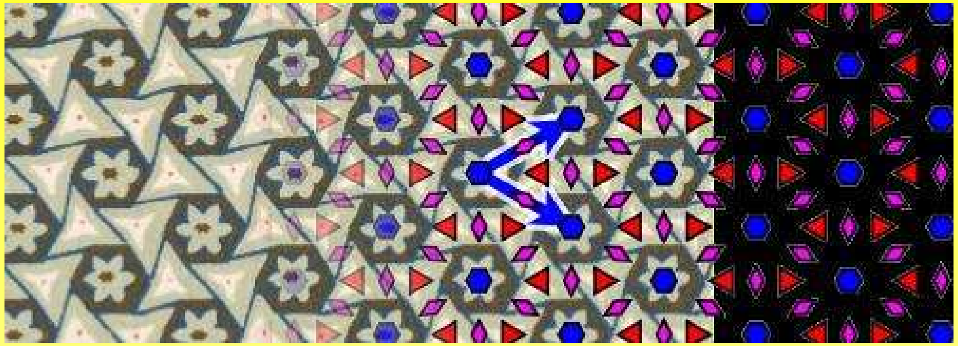
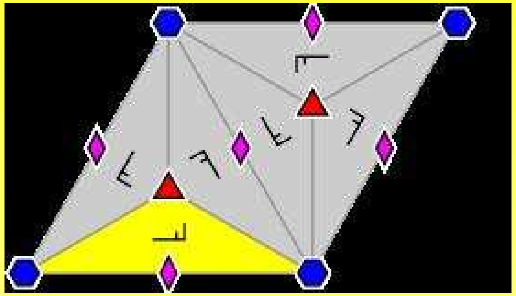


Gruppe p31m: Grundbereich 60°-Raute, 120°-Drehungen, Spiegelungen mit Achsen, die alle Drehzentren enthalten

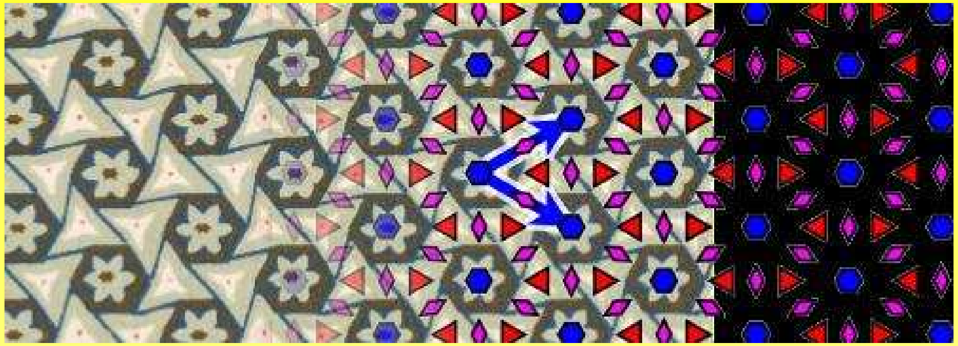


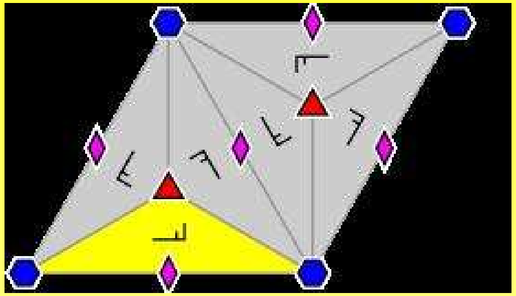


Gruppe p6: Grundbereich 60°-Raute, Verschiebungen und 60°-Drehungen

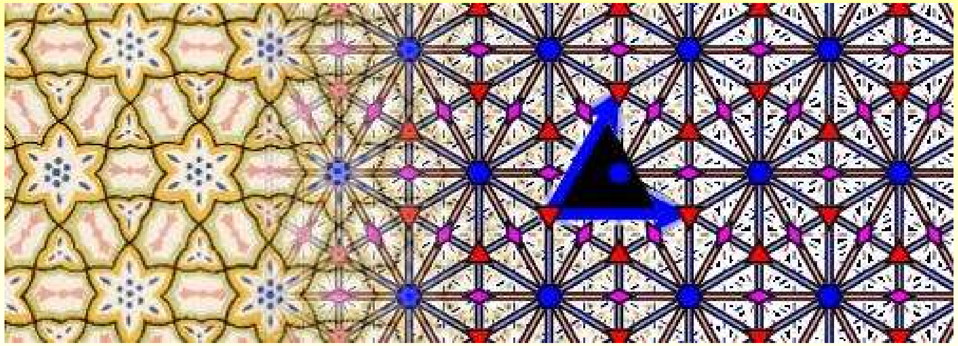
 

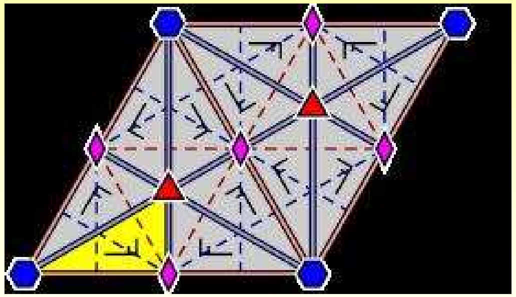
Gruppe p6: Grundbereich 60°-Raute, Verschiebungen und 60°-Drehungen





Gruppe p6m: Grundbereich 60°-Raute, Verschiebungen, 60°-Drehungen, Spiegelungen mit Achsen in 6 Richtungen





Weitere Symmetriegruppen

Weitere Symmetriegruppen

Nicht diskrete (kontinuierliche) ebene Symmetrien: Ist die Gruppe $\mathrm{Sym}(M)$ nicht diskret und enthält sie keine Verschiebungen, so gilt $\mathrm{Sym}(M) \cong \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, wie z.B. beim Kreis.

Weitere Symmetriegruppen

Nicht diskrete (kontinuierliche) ebene Symmetrien: Ist die Gruppe $\mathrm{Sym}(M)$ nicht diskret und enthält sie keine Verschiebungen, so gilt $\mathrm{Sym}(M) \cong \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, wie z.B. beim Kreis.

Allgemein sind kontinuierliche Symmetriegruppen sogenannte **Lie-Gruppen**.

Weitere Symmetriegruppen

Nicht diskrete (kontinuierliche) ebene Symmetrien: Ist die Gruppe $\mathrm{Sym}(M)$ nicht diskret und enthält sie keine Verschiebungen, so gilt $\mathrm{Sym}(M) \cong \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, wie z.B. beim Kreis.

Allgemein sind kontinuierliche Symmetriegruppen sogenannte **Lie-Gruppen**.

Man kann auch die räumlichen diskreten Symmetriegruppen mit drei linear unabhängigen Verschiebungsrichtungen klassifizieren. Man erhält die **230** **kristallographischen Gruppen**.

5 – Symmetrie im Alltag

Symmetrie ist die Ästhetik der Primitiven.

(Pablo Picasso)

5 – Symmetrie im Alltag

Symmetrie ist die Ästhetik der Primitiven.
(Pablo Picasso)

Symmetriegruppen kommen in der **Natur** häufig vor.

Oleander (Gruppe C_5) und Lilie (Gruppe D_3)

Symmetrie und Attraktivität

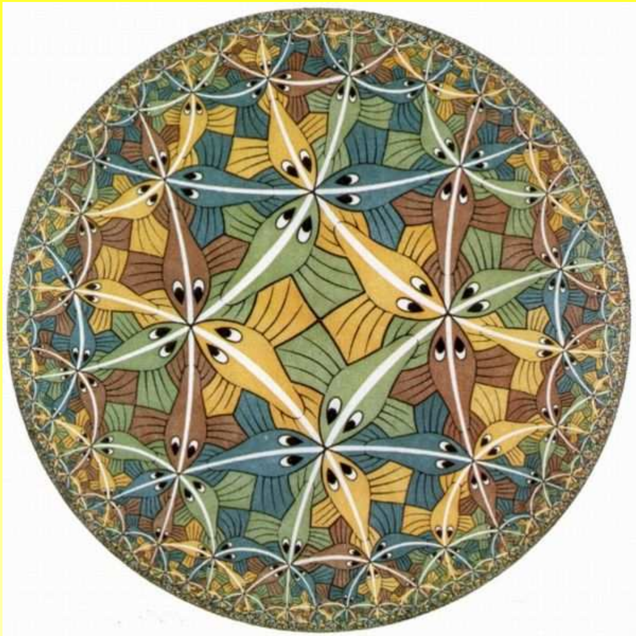
Symmetrie und Attraktivität

Wissenschaftliche Untersuchungen ergaben, dass Symmetrie zwar ein Faktor ist, der Attraktivität beeinflusst, jedoch bei weitem nicht in dem Ausmaß, wie es oft behauptet wird.

Symmetrien in nichteuklidischen Geometrien

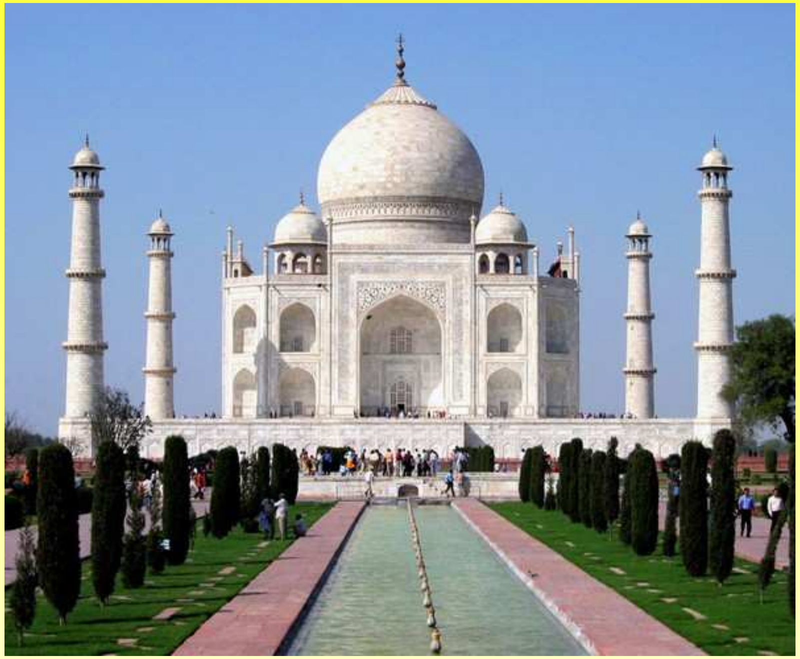
Symmetrien in nichteuklidischen Geometrien



Auch Symmetrien in der hyperbolischen Geometrie (wie in diesem Bild *Circle-Limit-III* von **M.C. Escher**) werden erkannt und als ansprechend wahrgenommen.

Symmetrie in der Architektur

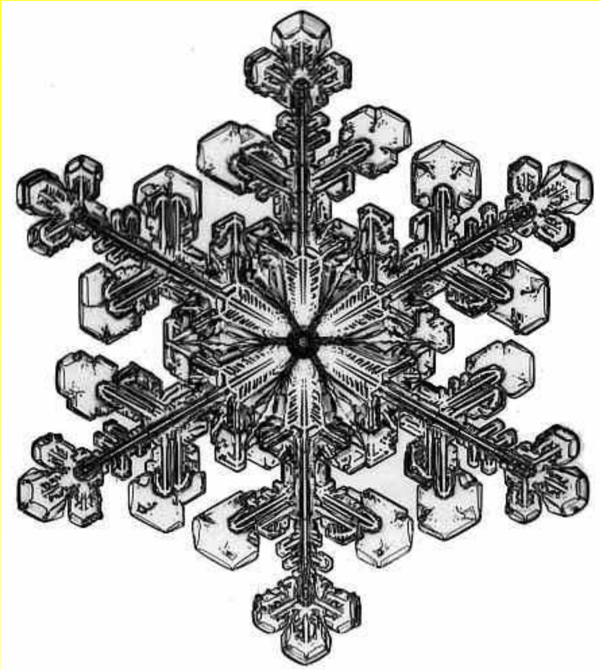
Symmetrie in der Architektur

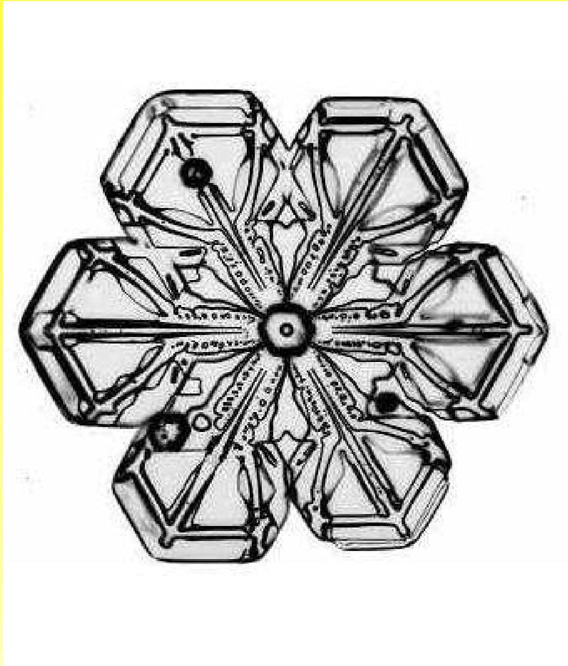


Taj Mahal (Gruppe D_4) und Castel del Monte (Gruppe D_8)

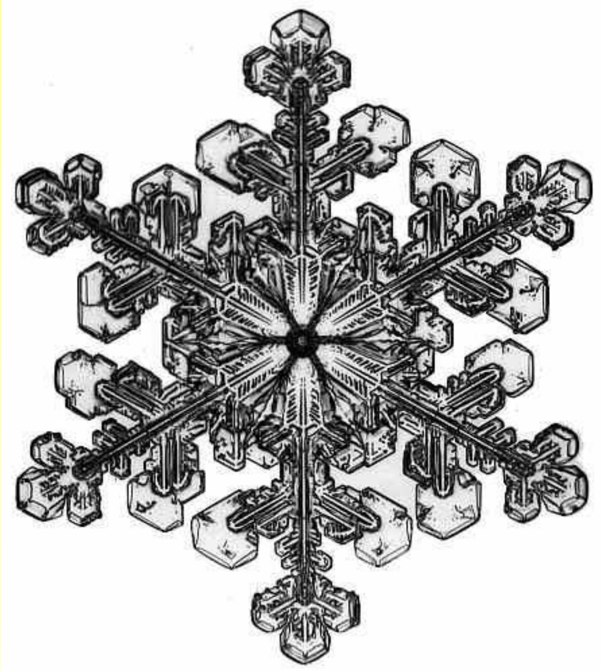
Symmetrie entsteht von selbst!

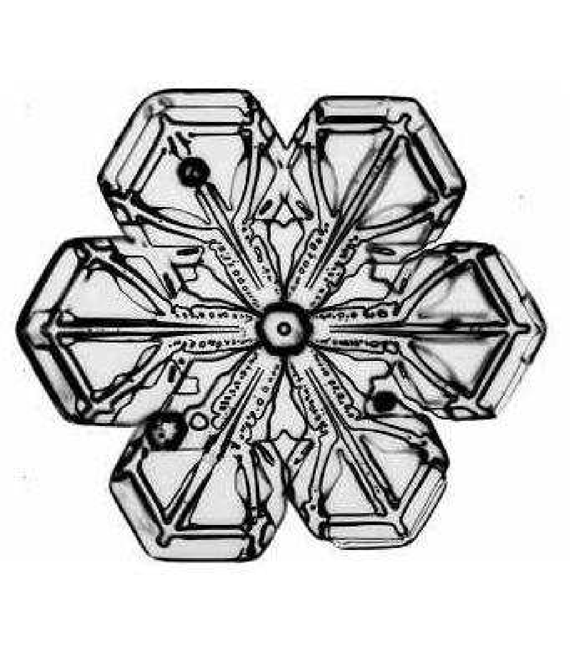
Symmetrie entsteht von selbst!





Symmetrie entsteht von selbst!





Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!