Mathematische BilderGeschichten

- narrative Mathematik-Didaktik mittels Elementen bildender Kunst -

Vortrag im Rahmen der Lehrerfortbildung

„Geschichte(n) der Mathematik“

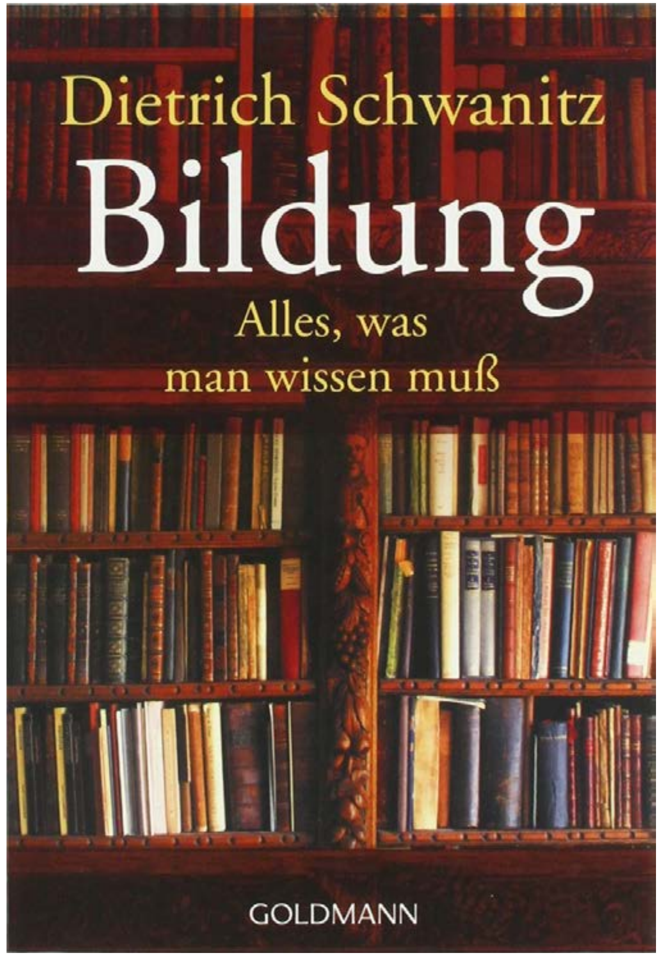
an der Universität Passau

16. Dezember 2015

Prof. Dr. Matthias Brandl
Professur (Lehrprofessur) für Didaktik der Mathematik
Lehr- u. Forschungseinheit LMI
Fakultät für Informatik und Mathematik
Universität Passau

UNIVERSITÄT PASSAU
Fakultät für Informatik und Mathematik

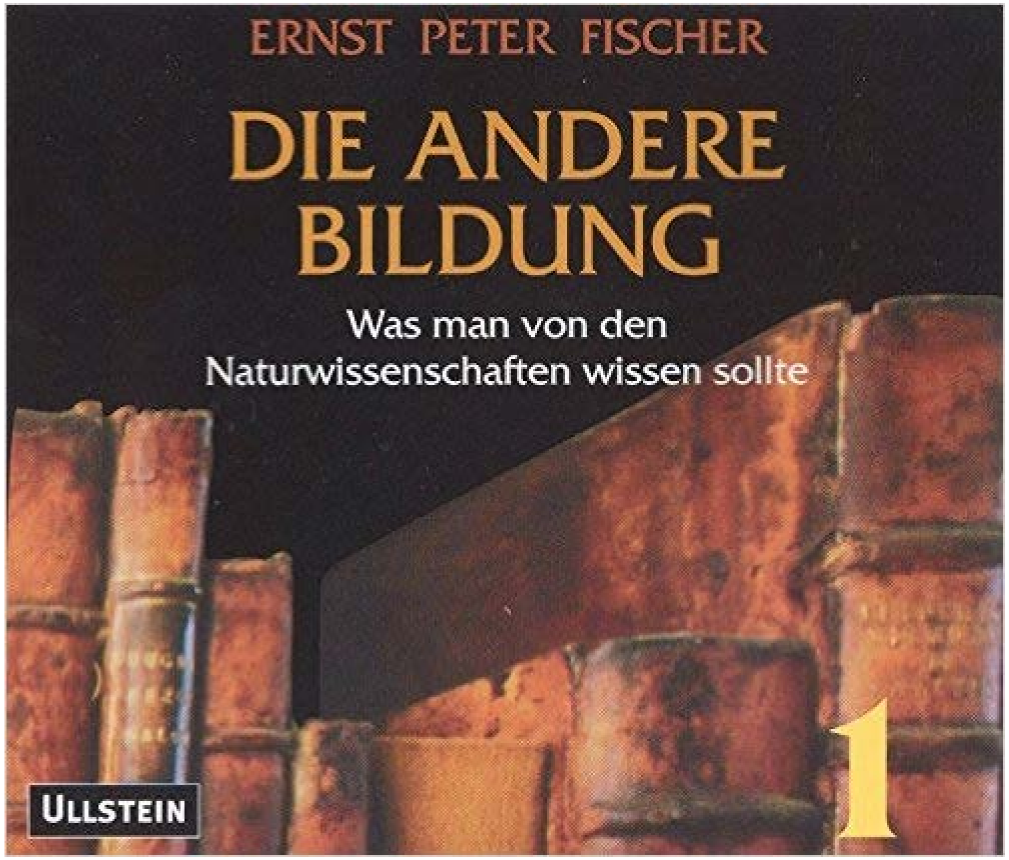
FortBILDUNG

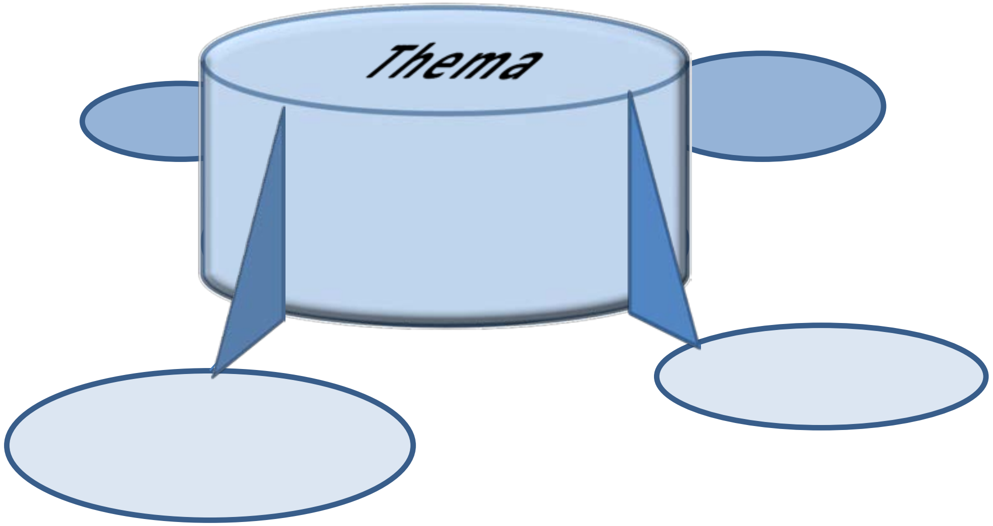


Naturwissenschaften fehlen

„Das Kapitel ‚Was man nicht wissen sollte‘ beschreibt die Wissensgebiete, die unter Gebildeten als verpönt angesehen werden. Dazu gehören u. a. die Informationen über die High Society aus der Regenbogenpresse, das Fernsehprogramm oder Sport. Das Kapitel schließt ab mit einer Veranschaulichung der **These von den „Zwei Kulturen“ von C. P. Snow**, der **geisteswissenschaftlich-literarischen Kultur** und der **naturwissenschaftlich-technischen Kultur**. Schwanitz zeigt dem Leser, wie das Mädchen Sabine und der Junge Torsten, die sich bei dem gemeinsamen Abitur noch lieben, dadurch auseinanderentwickeln, dass das Mädchen ein Fach im geisteswissenschaftlich-literarischen und der Junge ein Fach im naturwissenschaftlich-technischen Bereich studiert.“

(Wikipedia)


ERNST PETER FISCHER
DIE ANDERE
BILDUNG
Was man von den
Naturwissenschaften wissen sollte
ULLSTEIN
1

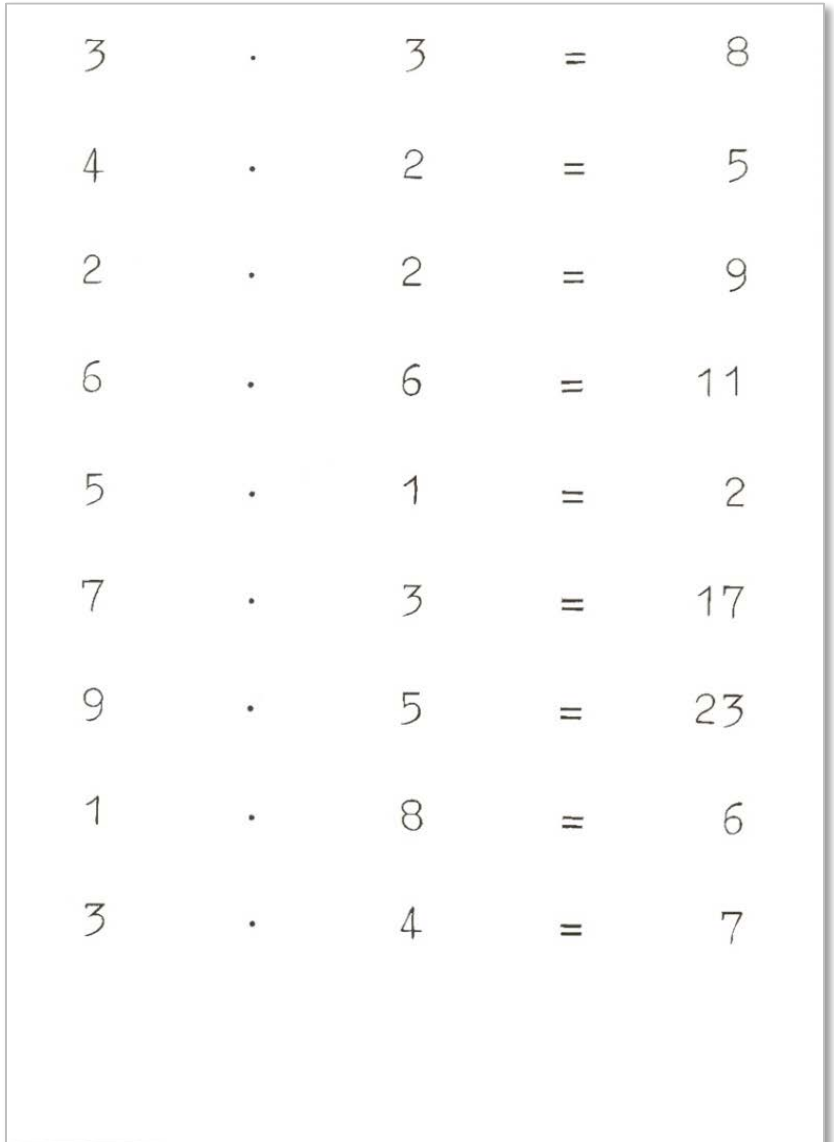


„Stützende Struktur“

Wood/Bruner/Ross (1976): „**scaffolding**“ (dt.: Gerüst)

M. Wagenschein (1989): „**Einwurzelung**“
(S. Weil 1956: „enracinement“)

Brandl & Nordheimer (2011)



[Sigmar Polke]: „Lösungen I-IV, 1967 (Tafel III), Serie *Die drei Lügen der Malerei*

Gliederung

- Vernetzung mit dem affektiven Bereich des Lernens
- Narrative Didaktik
  – Was ist narrative Didaktik?
  – Rechtfertigung für den Einsatz im Mathematik-UR
  – Erweiterung auf bildhafte Narration
- Beispiel: Entdeckung der Irrationalität
- Weitere Beispiele: Elemente Konkreter Kunst
- Dann (nach Kaffee, Vortrag und Essen): „Übungen“, „Werken“ und „Simpsons“ – plus „Mathe-Museum“

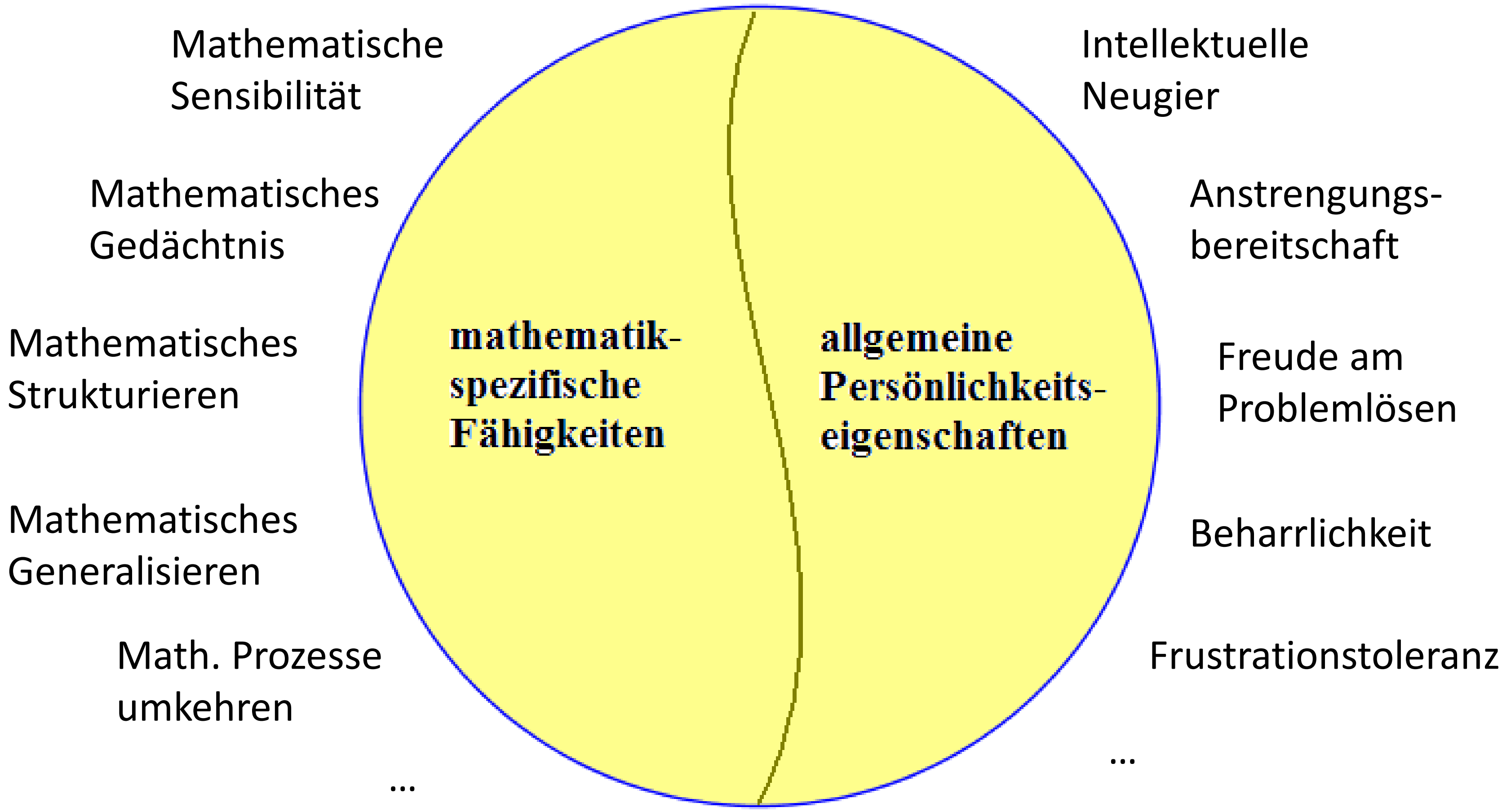
Die Bedeutung des affektiven Bereichs

Begabungsfaktoren

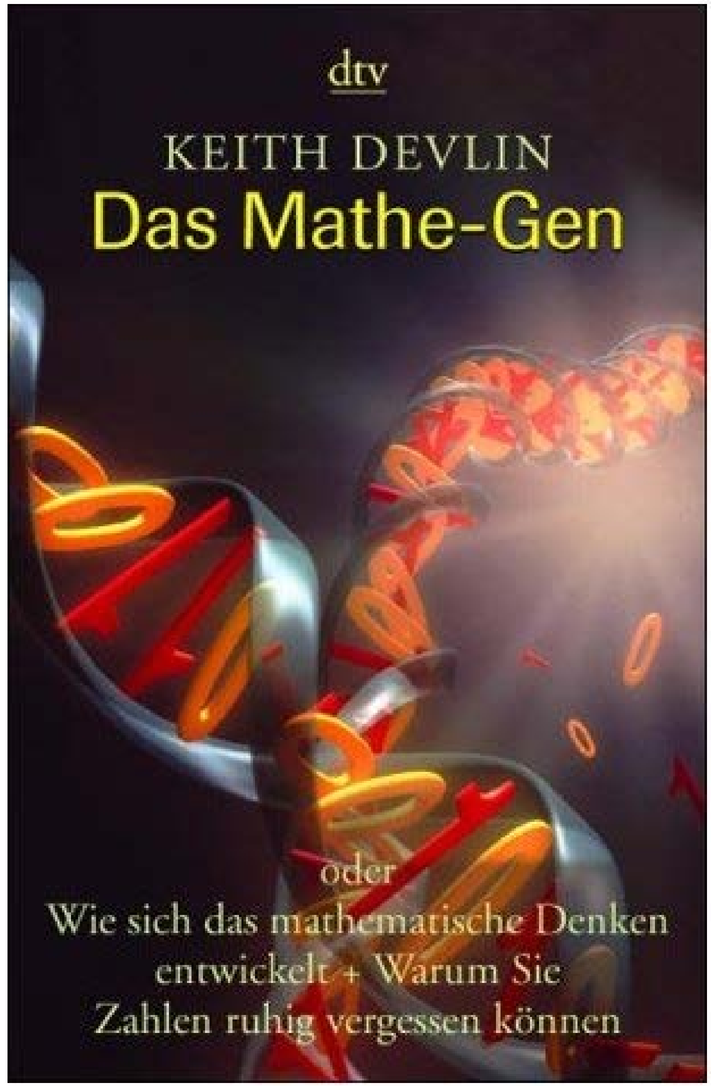
Interesse

Notwendigkeit der Vernetzung

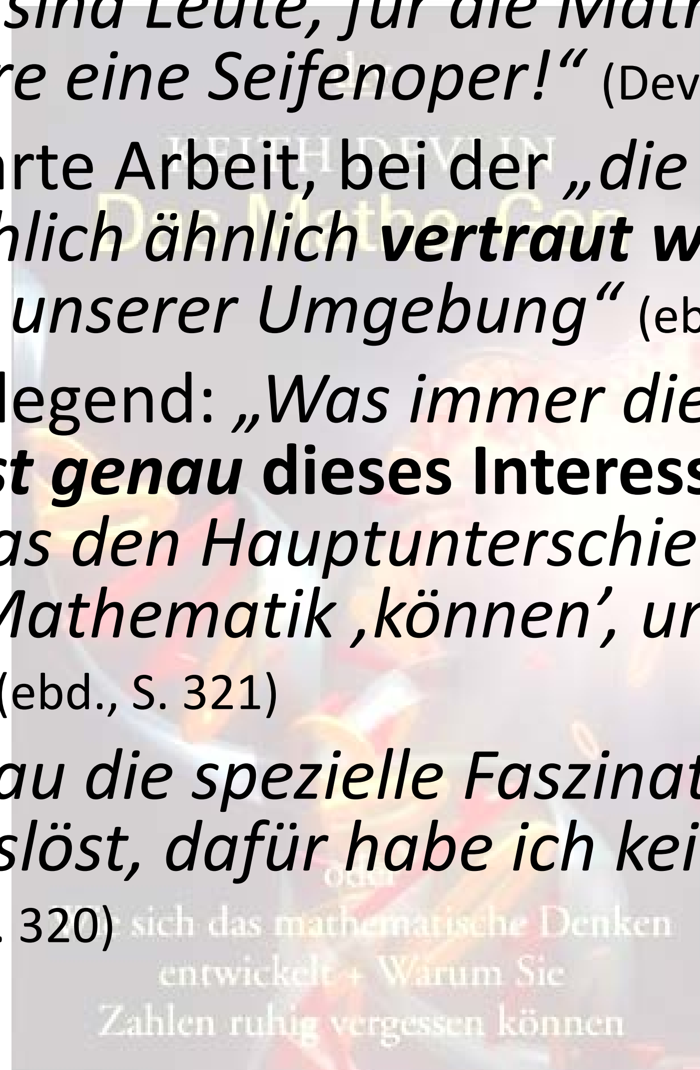
Mathematische Begabung



„Das Mathe-Gen“



„Das Mathe-Gen“



- *„Mathematiker sind Leute, für die Mathematik so etwas ist wie für andere eine Seifenoper!“* (Devlin 2001, S. 304)
- Zum Großteil harte Arbeit, bei der *„die Begriffe und Konzepte allmählich ähnlich* ***vertraut werden*** *wie Gegenstände in unserer Umgebung“* (ebd., S. 313)
- Interesse grundlegend: *„Was immer dieses Interesse verursacht,* ***es ist genau*** **dieses Interesse** *an Mathematik, was den Hauptunterschied zwischen denen ausmacht, die Mathematik ‚können', und denen, die es ‚nicht können'“* (ebd., S. 321)
- Aber: *„Was genau die spezielle Faszination für Mathematik auslöst, dafür habe ich keine präzise Antwort.“* (ebd., S. 320)

Empirischer Beleg

- **Notwendigkeit** einer Neigung und **eines Interesses** für Mathematik, um in diesem Fach erfolgreich zu sein:

*„It is expressed in a selectively positive attitude toward mathematics, **the presence of deep and valid interests** in the appropriate area, a striving and a need to study it, and an ardent enthusiasm for it. This kind of inclination, as a need for mathematical activity, is **the strongest motivating force** in the development of abilities."*

(Kruteskii 1976, S. 345)

Neuere „überraschende“ Erkenntnisse …

- *„Erfolg in Mathe: Motivation ist wichtiger als Intelligenz“* (Spiegel Online, 20.01.2013)

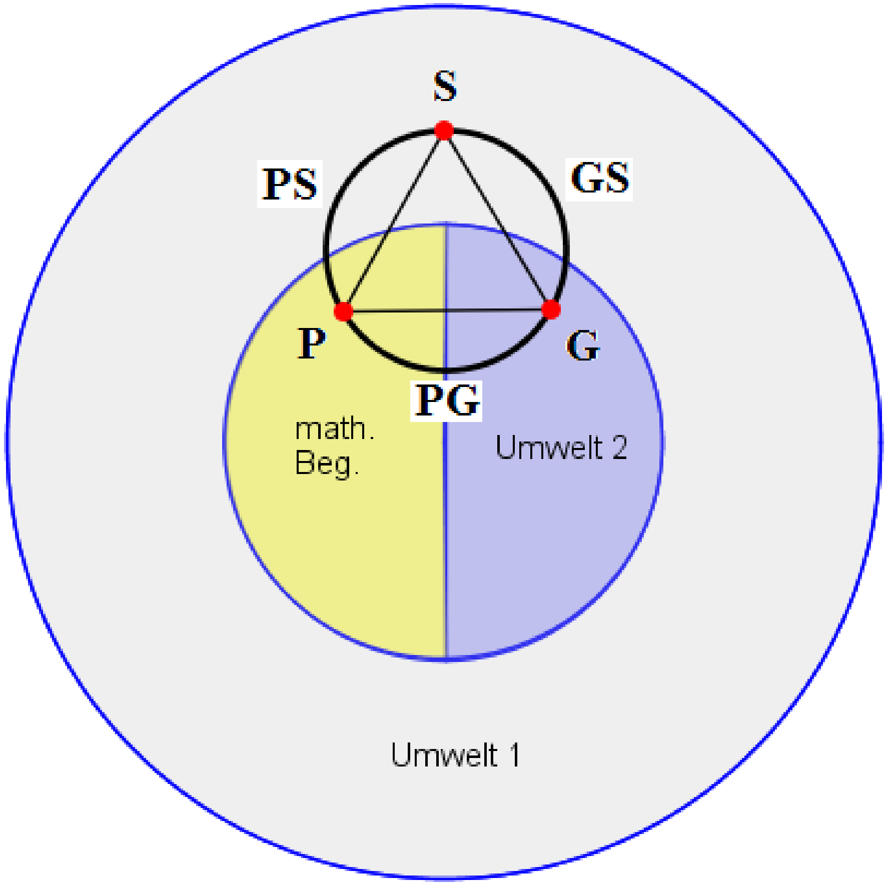
- Murayama et al.: *„Predicting Long-Term Growth in Students‘ Mathematics Achievement: The Unique Contributions of Motivation and Cognitive Strategies“* (Child Development, 2012)

Aufgabe der Lehrkraft

- *„If the teacher is able to awaken his interest in it and his inclination to study it, that pupil, ‚carried away' by mathematics, can quickly achieve great success.“* (Kruteskii 1976, p. 347)
- Csíkszentmihályi (1975): *Flow*
- Emotionaler Aspekt: *"The emotions a person feels are an important factor in the development of abilities in any activity, including mathematics."* (Kruteskii 1976, p. 347)

Interesse im System

Perspektivendiagramm (Bikner-Ahsbahs 2005)



PG: individuelles Interesse

- **Kognitiver Aspekt**: differenzierte Gegenstandsauffassung und in der Gegenstandsauseinandersetzung immanent enthaltenes Wissen, das aber das Gebiet der bereits ausgeführten Handlungen nicht überschreitet
- **Emotionaler Aspekt**: Gegenstand selbst, aktuelle und zukünftige Handlungen damit werden als emotional positiv erlebt bzw. erwartet
- **Wertbezogener Aspekt**: Gegenstand selbst ist wertvoll und die damit verbundenen Handlungsziele stehen in Einklang mit dem Selbstkonzept (Selbstintentionalität)

(Krapp 1992, S. 322)

PG: individuelles Interesse

- **Kognitiver Aspekt**: differenzierte Gegenstandsauffassung und in der Gegenstandsauseinandersetzung immanent enthaltenes Wissen, das aber das Gebiet der bereits ausgeführten Handlungen nicht überschreitet
- **Emotionaler Aspekt**: Gegenstand selbst, aktuelle und zukünftige Handlungen damit werden als emotional positiv erlebt bzw. erwartet
- **Wertbezogener Aspekt**: Gegenstand selbst ist wertvoll und die damit verbundenen Handlungsziele stehen in Einklang mit dem Selbstkonzept (Selbstintentionalität)

(Krapp 1992, S. 322)

Narrative Didaktik

Mathematik und Literatur(wissenschaft)

Motivation

- Stephen Klassen (2006): Kritik an zuerst in der TIMSS-Studie nachgewiesene und immer noch vorherrschende Dominanz des Schulbuches unter Bezug auf Whitehead (1929), der das Schulbuch an sich als *„an educational failure“* bezeichnet.
- Grundlegende Intention hinter der Konzeption der Schulbücher sei es *„to strip all unnecessary material and leave only the bare decontextualized scientific facts, theories, and laws along with the exemplar problems that demonstrate them“* (Klassen, 2006; S. 33).
- Hintergrund:
  - Locke: Geist als a priori *tabula rasa*, die ein rein frontales Instruktionsmodell des Lehrens und Lernens gemäß des „Nürnberger Trichters“ rechtfertigt.
  - Dabei oftmals vorherrschende isolierte Behandlung einzelner Aufgaben stammt aus der Verhaltenspsychologie und **widerspricht der auf moderner Lerntheorie basierenden Vernetzungsidee**.

- Empirische Verhaltenspsychologen (z.B. B.F. Skinner):
  - atomistische Definition von Wissen und damit verbundene kleinschrittige, zeitlich linear abfolgende, geführte Lerntheorie
  - „The whole process of becoming competent in any field must be divided into a very large number of very small steps, and reinforcement must be contingent upon the accomplishment of each step“ (Skinner, 1954, S. 94).
  - „If a learner attains the objectives subordinate to a higher objective, his probability of learning the latter has been shown to be very high; if he misses one or more of the subordinate objectives, his probability of learning the higher one drops to near zero.“ (Skinner 1965, S. 30)
- Aufspüren von potenziellen Wissenslücken ist das kurzsichtige Hauptanliegen traditioneller Instruktion und resultiert in der vertrauten ***„teach-test-teach-test sequence“*** (Klassen, 2006, S. 30), wobei hauptsächlich auswendig gelernte Fakten wiedergegeben werden sollen.
- Zentrale Annahmen (Resnick & Resnick, 1992): *„decomposability“* (Zerlegbarkeit) und *„decontextualization“* (Isolierbarkeit). Beide Annahmen **widersprechen fundamental dem Vernetzungsgedanken**.

- Kritik der Kognitionspsychologie (Chomsky, Piaget, …):
  - keine Berücksichtigung einer offensichtlich vorliegenden Komplexität sämtlicher Lernprozesse durch die verhaltenspsychologische Lerntheorie
- Paradigmenwechsel: kognitive Lerntheorie (Wygotsky) und Konstruktivismus.
- Darauf aufbauende moderne Unterrichtsmethoden wie z. B. **forschend-entdeckende** Verfahren tragen der Forderung nach einem *„forum for scientific discourse“* (Ebenezer & Frazer, 2001, S. 513) Rechnung und **spiegeln implizit und explizit den Vernetzungs-charakter sowohl in Bezug auf die fachlichen Inhalte wie auch auf das Unterrichtsgeschehen wider**. Die Berücksichtigung von Kontexten erweist sich hier als wesentlich.

Kontexte

- Klassen (2006): u.a. **historischer** und den **affektiver** Kontext.
- Starke curriculare Bindung und **Schulbuchzentrierung:** Schülerinnen und Schüler nehmen den Unterricht als **langweilig und irrelevant** wahr.
- **Das Lebendige der Wissenschaft**, das sich in Forschung, Entdeckung und Kreativität manifestiere, sei nirgends mehr vorhanden oder zu sehen. Ein Rückgriff auf authentische Elemente aus der Mathematikgeschichte könne hier abhelfen. (Klassen, 2006, S. 48, unter Bezug auf Cohen, 1950/1993; Jung, 1994; Kipnis, 1996; Koul & Dana, 1997).
- Wichtig sei das *“humanistic element in the learning process: Portraying scientists as human beings and giving students the opportunity to become effectively involved in the story of science are worthy goals in themselves.”* (Klassen, 2006, S. 51)

- <u>Aber:</u> schülergerechter Einsatz originaler historischer Texte und Materialien ist **sehr schwierig** (Kubli, 1999, 2002; Fowler, 2003; Holbrow et al., 1995)
- Klassen: *„the acceptance of original texts by students depends, first of all, on the level of mathematical difficulty and the degree of student familiarity with the mathematical notation“* (S. 51). Deswegen: *„check for the degree of obscurity of mathematical notation”* (S. 52).
- Kubli (1999, 2002): Schüler/innen reagieren wesentlich **positiver** auf historisches Material, wenn es in **narrativer Form** präsentiert wird.

- **zentrale Rolle des Affekts** im Rahmen von Lernprozessen:
  - *“emotions act as an arbitrator in rational decision-making; without access to one‘s emotions, it is impossible to plan and make rational decisions”* (Damasio, 1994)
  - *„unless pupils are willing to take the risk of some emotional commitment they are unlikely to learn“* (Barnes, 1992, S. 87)
  - *„Experience arouses emotion, which fixes attention and leads to understanding and insight, which results in memory“* (Howard, 2000, S. 549)
- Gerade diese wichtige Komponente des Lernprozesses, nämlich ein **emotionales Commitment** seitens der Lernenden, wird laut Egan (1989a, b) **durch eine narrative Vorgehensweise** angesprochen.

- Klassen unter Bezug auf Mott et al. (1999): *“The listener to, or reader of, a story engages with the story because he or she is encouraged to participate vicariously in the experiences of the protagonist. The kind of motivation produced by story is intrinsic, as opposed to the extrinsic motivation produced by a prescriptive teaching and learning episode.”*

- Praktiker Noddings & Witherell (1991, S. 279/280): *„We learn from stories. More important, we come to understand – ourselves, others, and even the subjects we teach and learn. Stories engage us … Stories can help us to understand by making the abstract concrete and accessible. What is only dimly perceived at the level of principle may become vivid and powerful in the concrete. Further, stories motivate us. Even that which we understand at the abstract level may not move us to action, whereas a story often does.“*

Narrative Didaktik ist …

- … kein Geschichtenerzählen, …
- … sondern mehr.
- Und es geht nicht darum, narrative Strukturen zur Analyse von Unterrichtspraxis zu verwenden (wie z.B. bei Wake et al. 2007, Williams et al. 2007), …
- … sondern um eine narrative Methode, die dem Inhalt dient.
- Im Folgenden: zusammenfassende Thesen (Kubli 2005)

Thesen

- Einwurzelung und „scientific literacy“ entsprechen sich gegenseitig.
- Eine narrative Didaktik geht davon aus, dass das rationale Denken nicht losgelöst vom affektiven Bereich funktionieren kann.
- Eine narrative Didaktik unterscheidet sich von anderen Ansätzen durch ihre Ausgewogenheit
- Schritt der Didaktik hin zur Poetik
- Die narrative Didaktik geht davon aus, dass der Mensch ein „erzählendes“ Wesen ist; Freude am Erzählen ist ein wesentlicher Faktor für den Lehrerfolg

Thesen

- Vorwurf an den naturwissenschaftlichen (und mathematischen) Unterricht: kalt, unattraktiv, abstrakt im Sinne von lebensfremd, menschenfeindlich, langweilig;

  Wo ist das Menschliche in den Naturwissenschaften (und in der Mathematik) geblieben?
- Narrative Darlegungen erlauben im Gegensatz zu den rein logisch-diskursiven Argumentationen auch das Umfeld miteinzubeziehen und zu thematisieren.
- Emotionale Aspekte des Forschens: Erwartungen, Illusionen, Hoffnungen und Absichten, Erfolge und Misserfolge usw.

Zitat

“I propose that science should be taught at whatever level, from the lowest to the highest, in the humanistic way. It should be taught with a certain philosophical understanding and a human understanding in the sense of biography, the nature of the people who made this construction, the triumphs, the trials, the tribulations.”

(Nobelpreisträger I. I. Rabi in Holton et al. 1970)

Mathematik als …

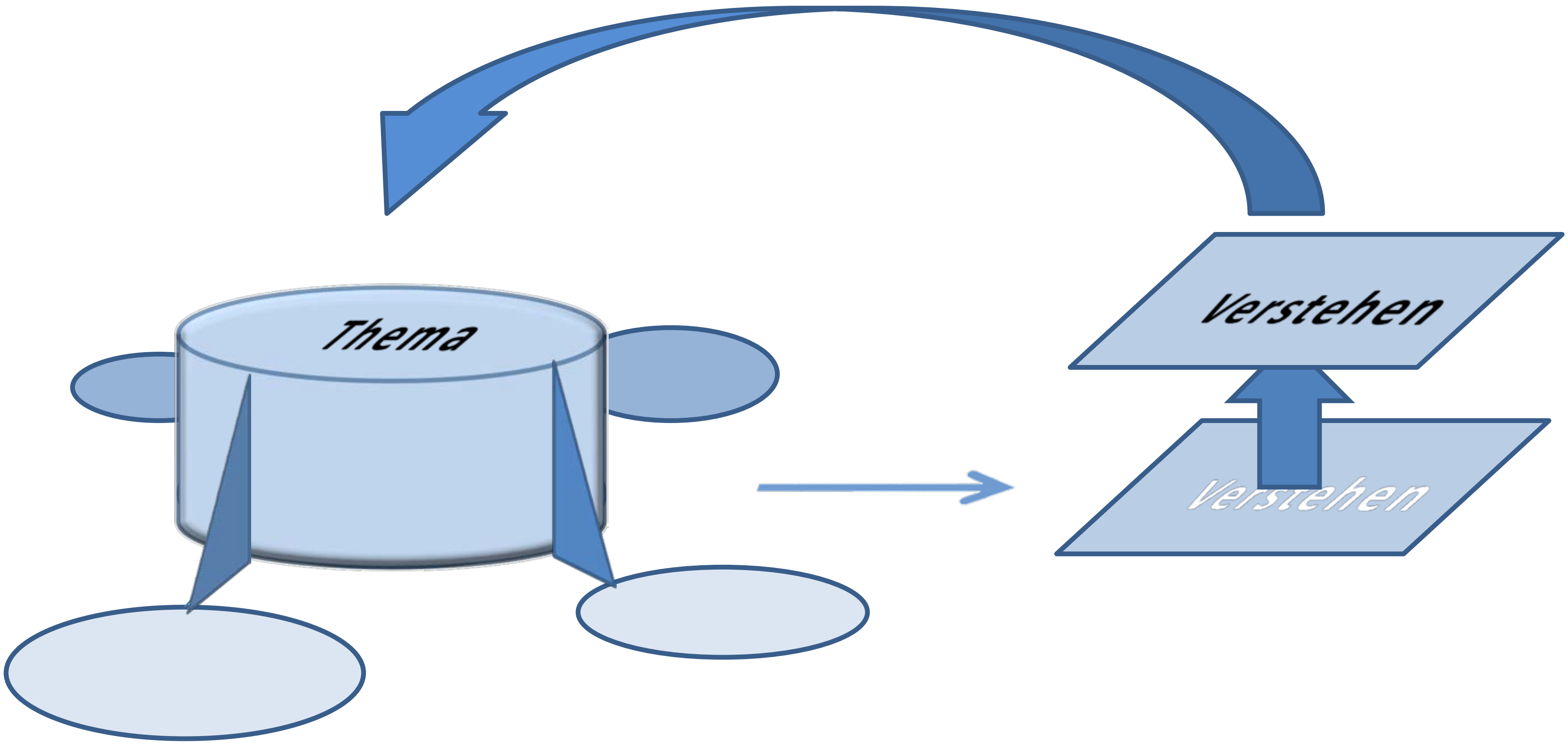
- Ausprobieren, Herumspielen in Verbindung mit Neugier an mathematischen Fragestellungen
- Häufig in Literatur:
  - Poincaré (1973)
  - Hadamard (1945)
  - Ruelle (2007) / Kantorovich (1993): „tinkering“
  - Dieudonné

„Statt mehr oder weniger phantastische Gründe an den Haaren herbei zu ziehen, braucht man doch nur um sich zu blicken, um zu erkennen, welchen universellen Reiz seit den frühesten Zeiten Spiele auf die Neugierde des Menschen ausgeübt […] haben: Rätsel, Denksportaufgaben aller Art, „Puzzles“ …“ (1985, S. 11)

Psychologische Grundlagen

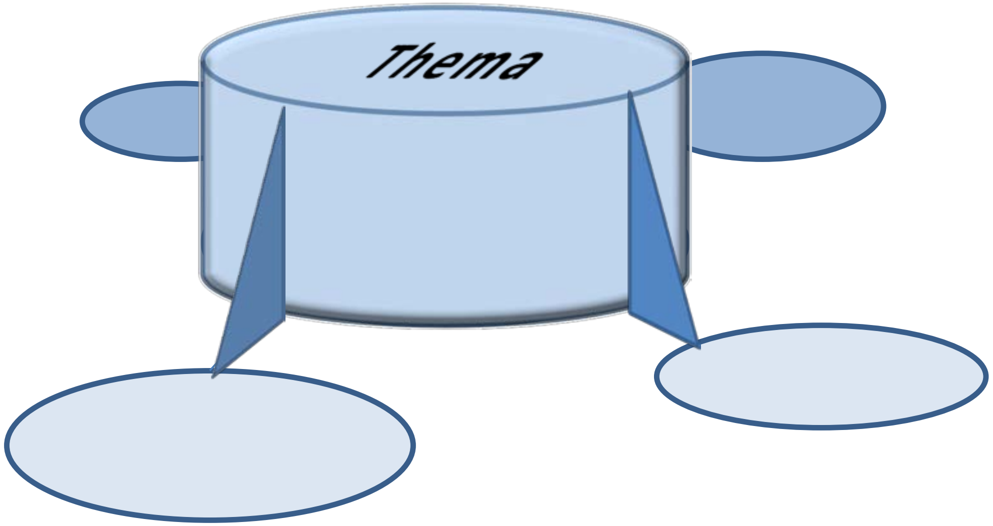
- J. Bruner in Anlehnung an Wygotsky: *„scaffolding“* (1976), d.h. die Vorstellung eines von den betreuenden Personen erstellten Gerüsts, das den Lernenden bei Bedarf hilft, sich darauf zu stützen.

„Verstehens-Shift“ durch Vernetzung



„Stützende Struktur“ „Shift“

Brandl & Nordheimer (2011)



„Stützende Struktur“

Wood/Bruner/Ross (1976): „**scaffolding**“ (dt.: Gerüst)

M. Wagenschein (1989): „**Einwurzelung**“
(S. Weil 1956: „enracinement“)

Brandl & Nordheimer (2011)

Enracinement

„Heutzutage kann ein Mensch den sogenannten gebildeten Kreisen angehören, ohne einerseits die geringste Vorstellung zu besitzen, worin das Wesen der menschlichen Bestimmung liegen könnte, oder andererseits etwa zu wissen, dass nicht alle Sternbilder zu jeder Jahreszeit sichtbar sind. Man ist gewöhnlich der Ansicht, ein kleiner Bauernjunge, der nur die Volksschule besucht hat, wisse darüber mehr als Pythagoras, weil er gelehrig nachplappert, dass die Erde sich um die Sonne dreht. In Wirklichkeit betrachtet er die Gestirne nicht mehr. Jene Sonne, von der im Unterricht die Rede ist, hat für ihn nichts gemein mit der Sonne, die er sieht. Man reißt ihn aus dem Allgesamt seiner Umwelterfahrungen heraus.“

Wagenschein (1968), S. 78 unter „Zum Problem des Genetischen Lehrens", 2. „Enracinement“

Verdunkeltes Wissen

„Unter solchen Umständen die Gründe nicht mehr zu sehen, erblindet zu sein, noch dazu infolge der Wortgläubigkeit, das allerdings produziert bildungswidriges, wirklichkeitsfremdes, entwurzelndes Wissen: Scheinwissen.“

Wagenschein (1968), S. 64 – 66.

Psychologische Grundlagen

- J. Bruner in Anlehnung an Wygotsky: ***„scaffolding“*** (1976), d.h. die Vorstellung eines von den betreuenden Personen erstellten Gerüsts, das den Lernenden bei Bedarf hilft, sich darauf zu stützen.
- Bruner stellt der logisch-diskursiven Argumentation den narrativen Denkmodus gegenüber.
- Der narrative Modus zielt auf gute, auf „believable (though not necessarily „true“) historical accounts“ (1986)
- Die narrative Sicht bezieht sich auf das Einmalige, Partikuläre und ist das Gegenstück zu den auf das Allgemeine ausgerichteten logisch-diskursiven Theorien.
- Für Bruner ungeklärte Frage: Wie setzt man die narrativen Elemente vor allem in den Naturwissenschaften richtig ein?

	Logico-scientific mode	Narrative mode
Events	Simple recitation of a series of events (linear, „hence“, „then“, „thus“, …) Prediction	Looking for particular connections between events Retrodiction
Time	Irrelevant	Concerns the past
Structure	No discourse time Logical chronological ordering Strictly connected	Double time structuring including discourse time (flashbacks, flash forwards, …) Possibility of blanks
Agency	No agency / actors / characters necessary	Characters / Actors as human beings necessary
Explanations	Intrinsic (facts, knowledge)	Extrinsic („about“, „how“)

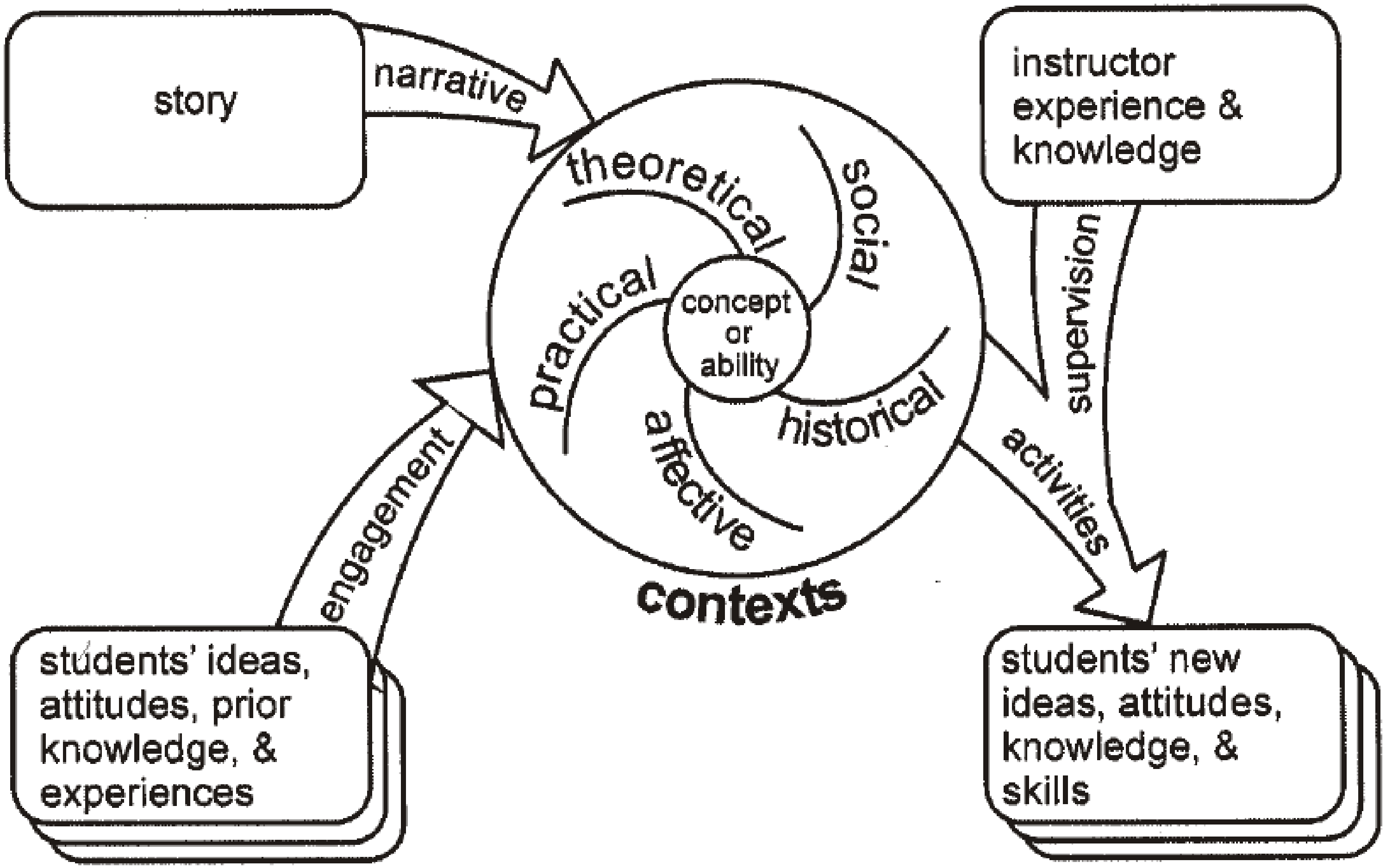
Norris et al. (2005)

Erzähltheoretische Grundlagen

- Schritt von der kognitiven zur narrativen Psychologie durch Bruner entspricht in der Didaktik dem Schritt hin zur Poetik (Lehre von der Erzählkunst).
- Lehrende sind gut beraten, sich am Dichter zu orientieren, und nicht am Chronisten, denn in der Schule interessiert in der Regel nicht das Besondere, sondern die allgemeine Erkenntnis, die sich durch den besonderen Fall illustrieren lässt. (vgl. Aristoteles Poetik Kap. 9)
- A. Hitchcock: Wirkungsvolles Erzählen ist mit einer Strategie verbunden, wo Teilziele erreicht werden müssen und das Endziel zu keinem Zeitpunkt außer Acht gelassen werden darf.

- Die Identifikation mit den Protagonisten gelingt offenbar leichter, wenn sie als Menschen mit ihren Sorgen und Nöten dargestellt werden.
- Erzählungen beziehen die emotionale Ebene in viel größerer Intensität ein als ein Bericht.
- Ein Unterricht, der narrative Aspekte als wesentlich für den Vermittlungsprozess wahrnimmt und ihre tragende und verbindende Funktion im Wissensprozess anerkennt, verbindet die abstrakte Welt der mathematischen Relationen mit der gelebten Wirklichkeit von Erzählungen. („Hebammenkunst“ der Erzählung: sokratische Meeutik)
- Reich-Ranicki (1967): „Während der Romancier den Hunger befriedigt, regt der Geschichtenerzähler vor allem den Appetit an“.

Klassen‘s Story-Driven Contextual Approach



Klassen (2006), S. 55

Erweiterung

- These: **Auch Bilder** können als Elemente einer Narrativen Didaktik genutzt werden.
- Bild als Ausgangspunkt und Rätsel
- Beispiel auch: *„Alles ist Zahl“* (Hrsg.: Peter Baptist, 2008) mit Motiven von Eugen Jost und flankierenden Texten hinsichtlich des mathematischen Inhalts von Peter Baptist und Alfred Beutelspacher

Beispiel

Entdeckung der Irrationalität

Beispiel

- „Lernziel/Lerninhalt“: Entdeckung der Irrationalität aufgrund der Existenz inkommensurabler Strecken (im Pentagramm)
- Historisch-genetisch korrekt
- Vernetzung mit verschiedenen flankierenden Elementen im Sinne einer narrativen Didaktik
- „Funktioniert“ (pdf)

Zitat

„… wird es doch häufig als Schwierigkeit empfunden, dieses Thema auch für Schüler attraktiv und faszinierend werden zu lassen. Oft erschöpft sich die ‚Entdeckung' der Irrationalität aus Schülersicht in einem Nachvollziehen des vom Lehrer präsentierten Widerspruchsbeweises."

(Frohn 2009 in ml 154, S. 20)

μηδεις εισιτοω αγεωμετρικος

Nemo geometriae ignarus intrato

Kein der Geometrie Unkundiger
möge hier eintreten

Platons Akademie in Athen

- Mathematik hatte einen hohen Stellenwert
- Neben Arithmetik als erstem Lehrfach wurde Geometrie als zweites Lehrfach festgelegt
- Mathematiker = Geometer
- Zitat aus „Der Staat“ („Politeia“), 7. Buch, Abschnitt 9; Unterhaltung zwischen Sokrates („ich“) und Platons Bruder Glaukon („er“)

Der Staat, 7. Buch, Abschnitt 9

Damit hätten wir also ein erstes Lehrfach festgelegt, fuhr ich fort. Wie ist es nun mit dem zweiten, das damit zusammenhängt? Sehen wir, ob es sich für uns eignet!
*Welches denn? Meinst du etwa **die Geometrie**? fragte er.*
Ja, gerade sie, erwiderte ich.
Soweit sie sich auf das Kriegswesen bezieht, sagte er, ist es klar, dass sie sich eignet. Um das Lager abzustecken, um feste Plätze einzunehmen, um das Heer zusammenzuziehen oder zu entfalten, und was es sonst noch für Truppenbewegungen in der Schlacht selbst oder auf dem Marsch geben mag: da macht es ja gewiss etwas aus, ob man von Geometrie etwas versteht oder nicht.
…

Nun denn, sagte ich, dafür genügt doch wohl ein bescheidenes Stück Geometrie und Rechenkunst. Dagegen müssen wir untersuchen, ob ihr wichtigerer und weiter reichender Teil etwas zu unserem Zwecke beiträgt, ***uns die Anschauung der Idee des Guten zu erleichtern****. Es trägt aber alles dazu bei, behaupten wir,* ***was die Seele zwingt, sich dem Orte zuzuwenden, wo das Glückseligste von allem Seienden sich befindet, das sie unbedingt schauen muss****.*
Du hast recht., sagte er.
…

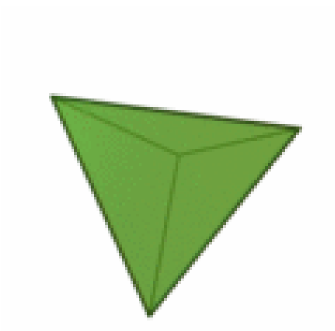
Da werden wir uns leicht einig, sagte er. ***Die Geometrie ist doch die Erkenntnis des immer Seienden.***
Dann, mein Bester, würde sie also ***die Seele zur Wahrheit hinziehen****, sagte ich, und philosophisches Denken in uns wirken; wir richten dann nach oben, was wir jetzt, obschon es nicht so sein sollte, nach unten richten.*
Ja, das tut sie so sehr als möglich, sagte er.
Wir müssen also mit allem Nachdruck darauf halten, fuhr ich fort, dass die Bürger unserer Musterstadt die Geometrie auf keinen Fall vernachlässigen.
...

„Über die Natur“ („Timaios“)

- Platons Freund Theaetetos (Platon: *„ein äußerlich hässlicher Schöngeist“*) konstruiert als Erster alle 5 „hoch symmetrischen“ Körper ausgehend von regelmäßigen Flächen
- Verbindende Eigenschaft: *symmetría* („Ebenmaß“)
- Platon im *Timaios*: Bausteine der Materie im Schöpfungsmythos

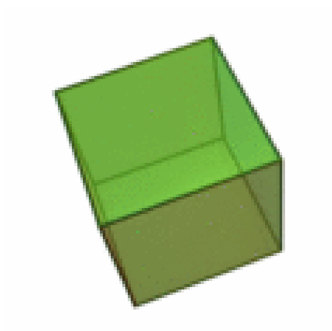
Die Platonischen Körper

Tetraeder



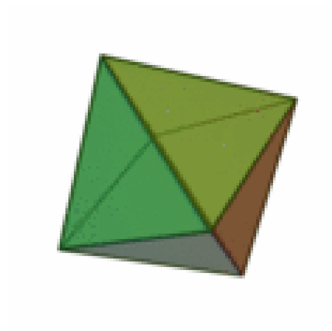
4 gleichseitige Dreiecke

Hexaeder



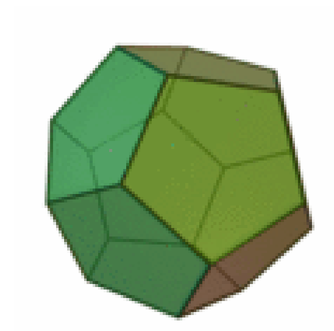
6 Quadrate

Oktaeder



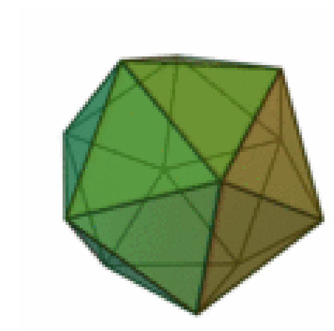
8 gleichseitige Dreiecke

Dodekaeder



12 regelmäßige Fünfecke

Ikosaeder



20 gleichseitige Dreiecke

(Bildquelle: Wikipedia)

XXXXX (4. Jh. v. Chr.): xxxxxxxxxx xxxxxxxx

(§ 18a).

Weiter behaupte ich, dass sich außer den besprochenen Fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde.

Aus 2 Dreiecken oder überhaupt ebenen Flächen lässt sich keine Ecke errichten; aus 3 Dreiecken die der Pyramide, aus 4 die des Oktaeders, aus 5 die des Ikosaeders. Eine Ecke aus 6 gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecken, die an einem Punkt zusammengesetzt wären, kann es nicht geben; denn da der Winkel des gleichseitigen Dreiecks 2/3 R. beträgt, würden die 6 zusammen = 4 R.; dies ist unmöglich, denn jede Ecke wird von Winkeln umfasst, die zusammen < 4 R. (XI, 21). Aus demselben Grunde lässt sich auch aus mehr als 6 (solchen) ebenen Winkeln keine Ecke errichten. Von 3 Quadraten wird die Würfelecke umfasst; mit 4 ist es unmöglich, denn sie gäben wieder 4 R. Bei gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken wird von 3 die Dodekaederecke umfasst. Mit 4 ist es unmöglich; denn da der Winkel des gleichseitigen Fünfecks 1 1/5 R. beträgt, würden die 4 Winkel zusammen > 4 R.; dies ist unmöglich. Wegen desselben Widerspruchs kann auch von anderen Vielecken keine (verwendbare) Ecke umfasst werden.

3 6

Euklid (4. Jh. v. Chr.): Elemente (Buch XIII)

(§ 18a).

Weiter behaupte ich, dass sich außer den besprochenen Fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde.

Aus 2 Dreiecken oder überhaupt ebenen Flächen lässt sich keine Ecke errichten; aus 3 Dreiecken die der Pyramide, aus 4 die des Oktaeders, aus 5 die des Ikosaeders. Eine Ecke aus 6 gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecken, die an einem Punkt zusammengesetzt wären, kann es nicht geben; denn da der Winkel des gleichseitigen Dreiecks 2/3 R. beträgt, würden die 6 zusammen = 4 R.; dies ist unmöglich, denn jede Ecke wird von Winkeln umfasst, die zusammen < 4 R. (XI, 21). Aus demselben Grunde lässt sich auch aus mehr als 6 (solchen) ebenen Winkeln keine Ecke errichten. Von 3 Quadraten wird die Würfelecke umfasst; mit 4 ist es unmöglich, denn sie gäben wieder 4 R. Bei gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken wird von 3 die Dodekaederecke umfasst. Mit 4 ist es unmöglich; denn da der Winkel des gleichseitigen Fünfecks 1 1/5 R. beträgt, würden die 4 Winkel zusammen > 4 R.; dies ist unmöglich. Wegen desselben Widerspruchs kann auch von anderen Vielecken keine (verwendbare) Ecke umfasst werden.

Euklids Elemente

- **Erstes** umfassendes mathematisches Lehrbuch der Weltgeschichte
- Seit Erfindung der Buchdruckerkunst (1482) **mehr als 1000 Auflagen**
- Nach der Bibel das am **zweithäufigsten gedruckte Buch** überhaupt
- Bis in das 19. Jh. **wesentliche Grundlage** des Mathematik-UR an höheren Schulen
- **13 Bücher**, in denen alle damals bekannten Gebiete der Mathematik abgehandelt werden
- Erster überlieferter Versuch, Geometrie aus einer Reihe von Grundaussagen auf **rein deduktivem Wege** aufzubauen.

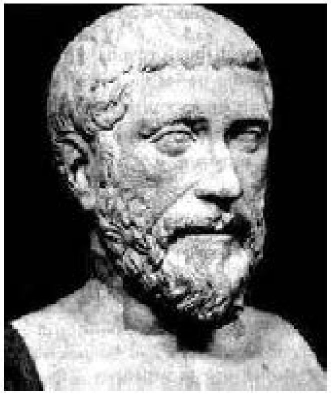
Euklids Elemente: die 13 Bücher

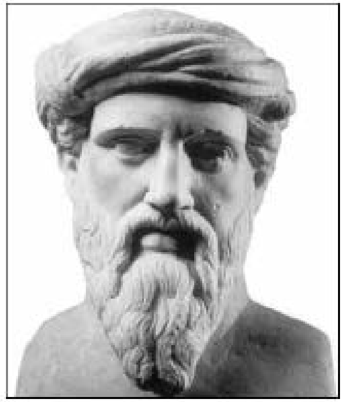
I.	Anfang eines axiomatischen Aufbaus der ebenen Geometrie bis zur Satzgruppe des Pythagoras *(weitgehend Wissen der Pythagoräer).*
II.	Grundlagen des algebraischen Operierens mit geometrischen Größen wie Strecken, Flächen u. Volumina *(ebenfalls pythagoräisches Gedankengut).*
III.	Kreislehre *(vermutlich pythagoräisch).*
IV.	Konstruktion ein- u. umbeschriebener regelmäßiger Vielecke.
V.	Proportionenlehre *(Eudoxos von Knidos (408?-355? v.Chr.))*
VI.	Anwendung der Proportionentheorie auf ebene Geometrie.
VII. – IX.	Sätze über natürliche Zahlen
X.	Sehr anspruchsvolle algebraische Theorie der mit Zirkel u. Lineal konstruierbaren Größen *(vermutlich von Theaetetos (415?-369? v.Chr.).*
XI.	Elementares zur räumlichen Geometrie
XII.	Sätze über Volumina *(z.T. von Eudoxos)*
XIII.	Konstruktion der fünf regulären Polyeder aus dem Radius der Umkugel *(nach Theaetetos)*

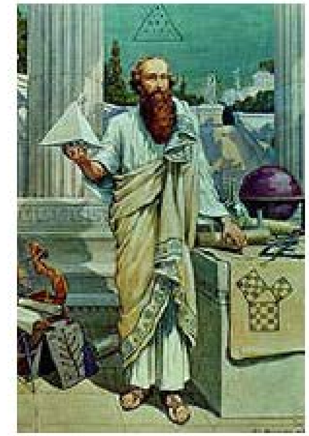
Euklids Elemente: die 13 Bücher

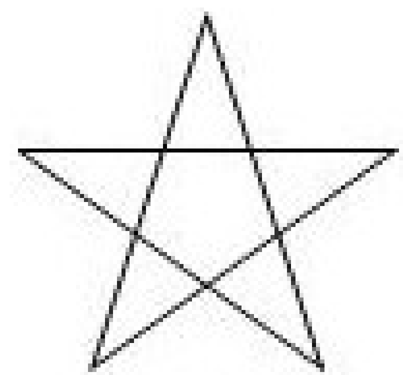
I.	Anfang eines axiomatischen Aufbaus der ebenen Geometrie bis zur Satzgruppe des Pythagoras *(weitgehend Wissen der* ***Pythagoräer****).*
II.	Grundlagen des algebraischen Operierens mit geometrischen Größen wie Strecken, Flächen u. Volumina *(ebenfalls* ***pythagoräisch****es Gedankengut).*
III.	Kreislehre *(vermutlich* ***pythagoräisch****).*
IV.	Konstruktion ein- u. umbeschriebener regelmäßiger Vielecke.
V.	Proportionenlehre *(Eudoxos von Knidos (408?-355? v.Chr.))*
VI.	Anwendung der Proportionentheorie auf ebene Geometrie.
VII. – IX.	Sätze über natürliche Zahlen
X.	Sehr anspruchsvolle algebraische Theorie der mit Zirkel u. Lineal konstruierbaren Größen *(vermutlich von Theaetetos (415?-369? v.Chr.).*
XI.	Elementares zur räumlichen Geometrie
XII.	Sätze über Volumina *(z.T. von Eudoxos)*
XIII.	Konstruktion der fünf regulären Polyeder aus dem Radius der Umkugel *(nach Theaetetos)*

Die Pythagoräer (6./5. Jh. v. Chr.)









Literatur:

Baptist, P. (1998): Pythagoras – und kein Ende?, Leipzig: Klett

„Alles ist Zahl(verhältnis)“

- Leben und Welt besteht aus unüberschaubaren inneren Widersprüchen, aus einem Chaos, das sich trotz allem als überraschend stabil erweist.
- Schluss auf eine verborgene – nach bestimmten Zahlenverhältnissen aufgebaute – Harmonie, die sowohl der Welt wie auch den Göttern selbst Halt und Ordnung bieten muss.
- Wichtigster Lebensinhalt des Menschen: diese Harmonie erforschen. (-> Politeia …)
- Intellektuelle Elite, Sekte, Schule, …

Die Krise

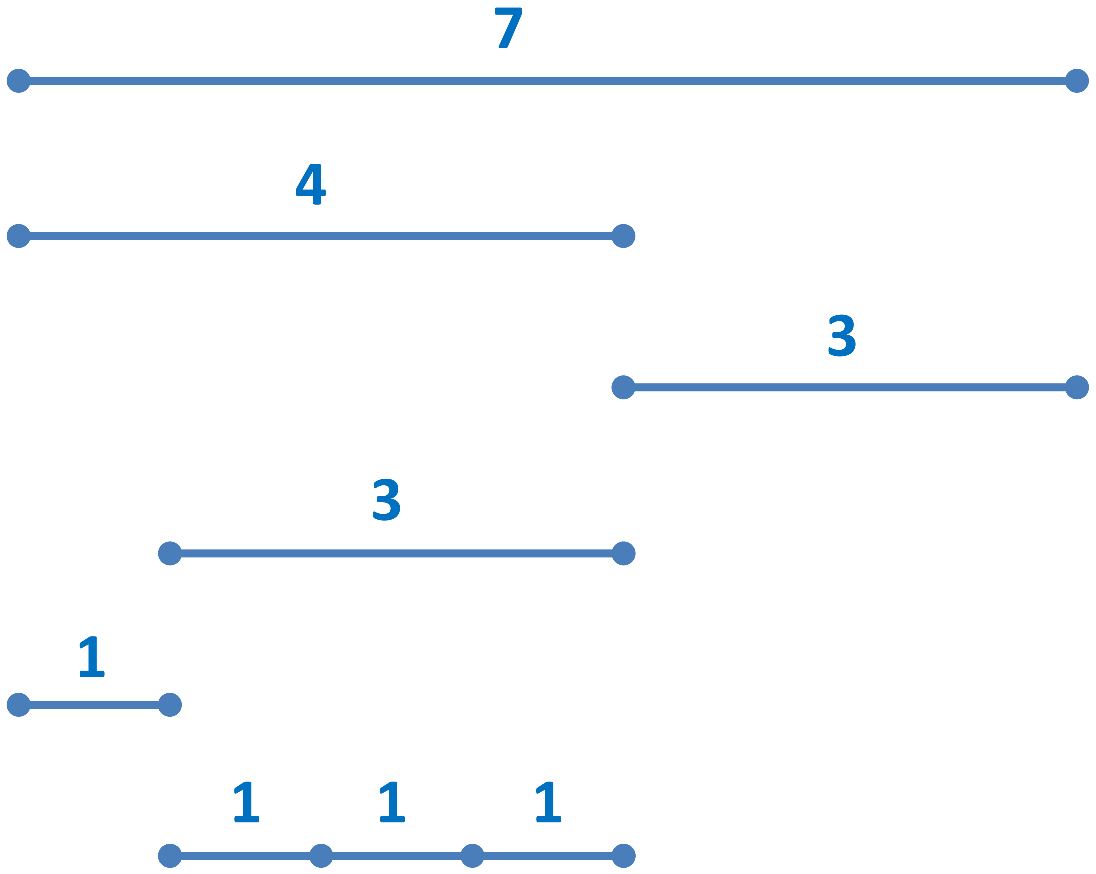
- Entdeckung der Existenz inkommensurabler Strecken, d.h. Strecken, die nicht in gegenseitiger Harmonie stehen, durch den Neuling Hippasos von Metapontum (um 430 v. Chr.).
- Ausgerechnet im Geheimzeichen der Pythagoreer selbst - dem Pentagramm.
- Strafe: Verbannung aus dem Orden und Errichtung einer symbolischen Grabstätte (oder sogar tatsächliche Ertränkung)

(In-) Kommensurabilität

- Altgriechische Mathematik: Zwei Größen *a* und *b* heißen **kommensurabel** (= *„mit einem gemeinsamen Maß messbar“*), wenn sie beide ein ganzzahliges Vielfaches einer Einheitsgröße *e* sind. Andernfalls heißen sie **inkommensurabel**.
  - **kommensurabel**: Verhältnis (a:b) ist *rationale* Zahl
  - **inkommensurabel**: (a:b) ist *keine* rationale Zahl (*„irrational“*)
- Praktisches Vorgehen (sei *b* die kleinere der beiden Größen):
    - Nehme so viele ganzzahlige Vielfache von *b* von der Größe *a* weg, bis der Rest *a‘* kleiner als *b* ist.
    - Nimm dann so viele ganzzahlige Vielfache von *a‘* von *b* weg, bis der Rest *b‘* kleiner als *a‘* ist.
    - usw.
  - **kommensurabel**: „Wechselwegnahme“ endet nach endlich vielen Schritten.

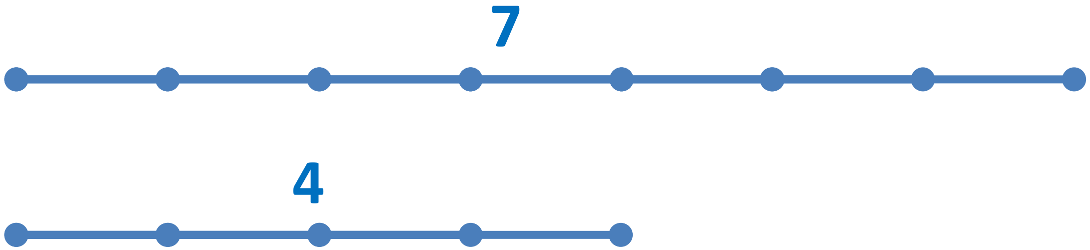
Schülerduden Mathematik II, S. 202.

$$a = 7, \quad b = 4$$



e = 1

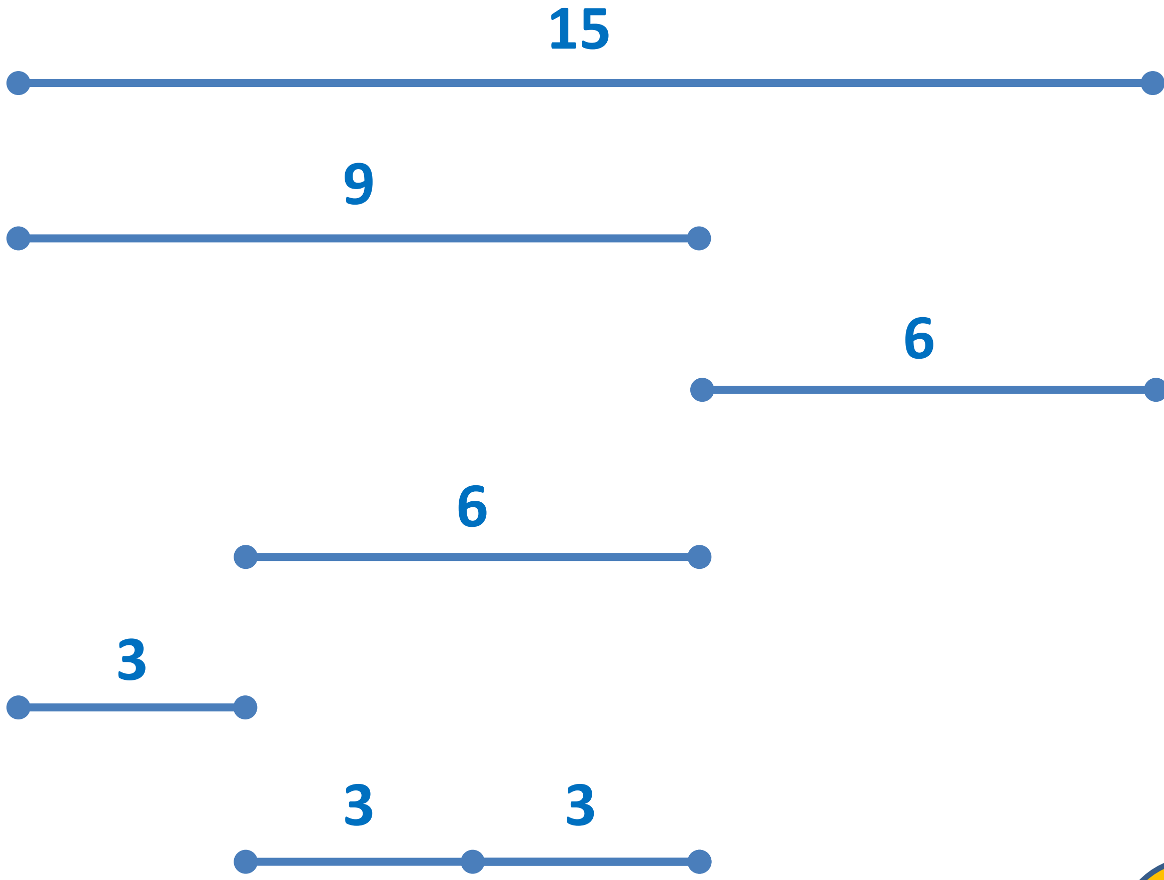
$$a = 7, \quad b = 4$$



e = 1

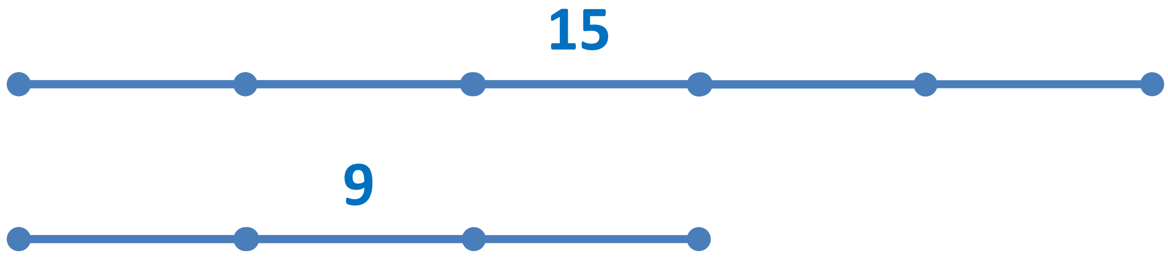
$$\frac{a}{b} = \frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 1}{4 \cdot 1}$$

$$a = 15, \quad b = 9$$



e = 3

$$a = 15, \quad b = 9$$



e = 3

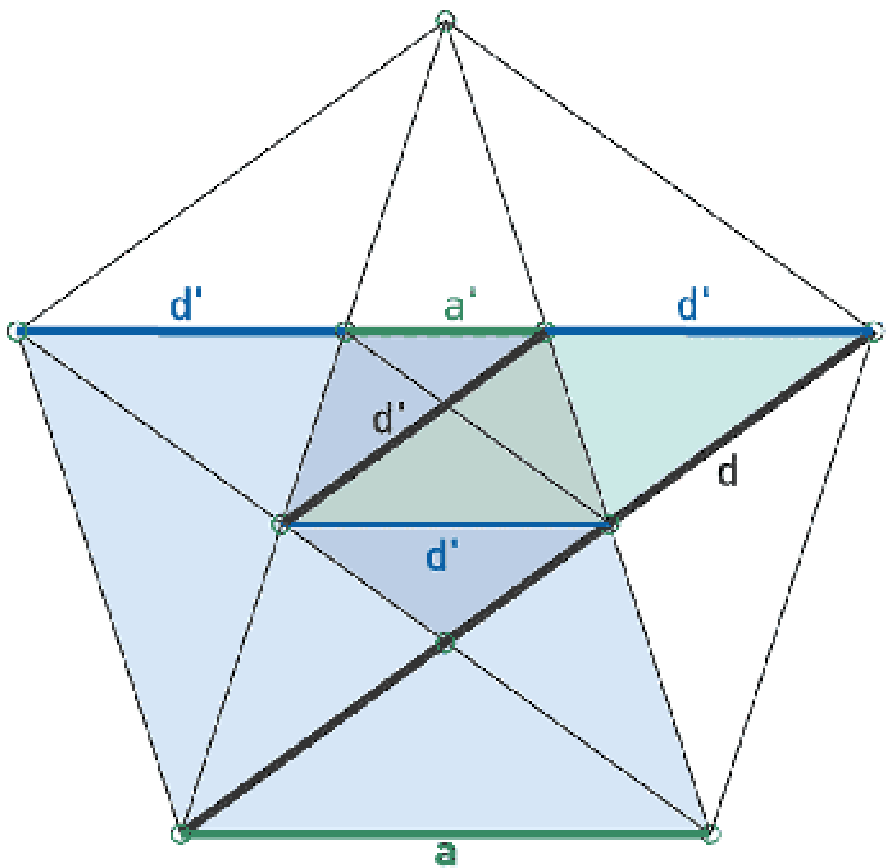
$$\frac{a}{b} = \frac{15}{9} = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 3}$$

(In-) Kommensurabilität

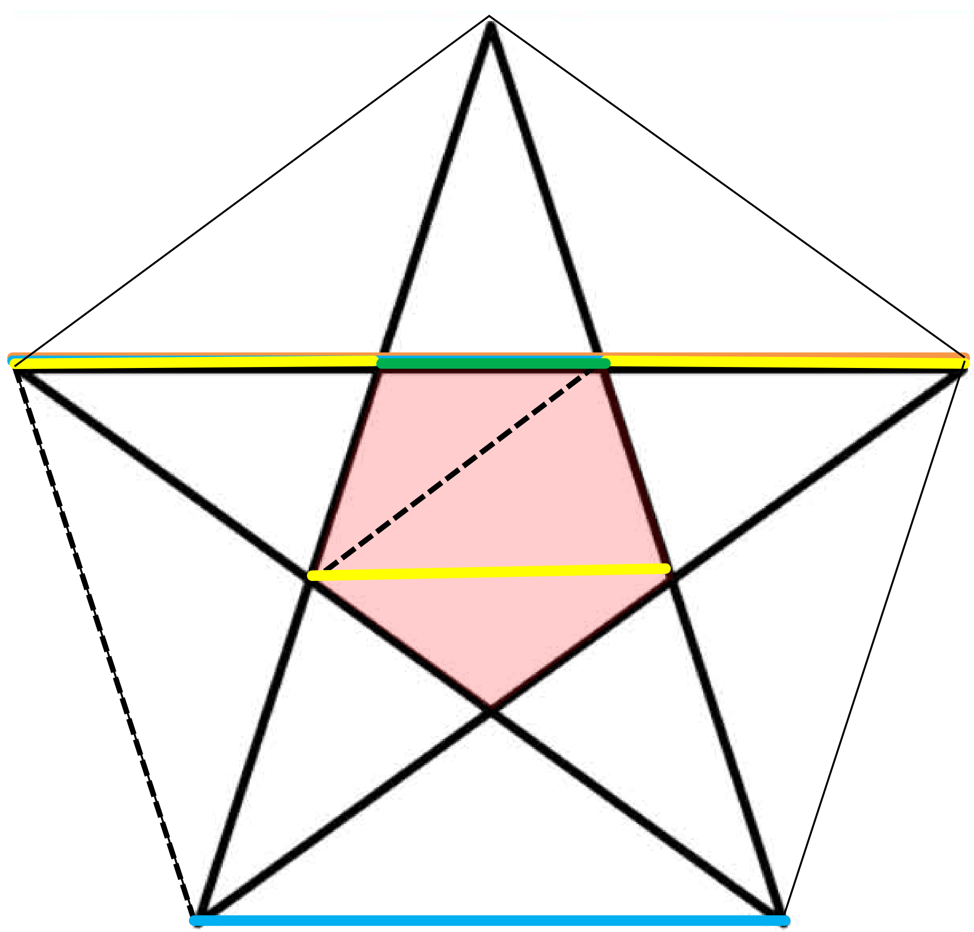
- Altgriechische Mathematik: Zwei Größen *a* und *b* heißen **kommensurabel** (= *„mit einem gemeinsamen Maß messbar*“), wenn sie beide ein ganzzahliges Vielfaches einer Einheitsgröße *e* sind. Andernfalls heißen sie **inkommensurabel**.
  - **kommensurabel**: Verhältnis (a:b) ist *rationale* Zahl
  - **inkommensurabel**: (a:b) ist *keine* rationale Zahl (*„irrational“*)
- Praktisches Vorgehen (sei *b* die kleinere der beiden Größen):
    - Nehme so viele ganzzahlige Vielfache von *b* von der Größe *a* weg, bis der Rest *a‘* kleiner als *b* ist.
    - Nimm dann so viele ganzzahlige Vielfache von *a‘* von *b* weg, bis der Rest *b‘* kleiner als *a‘* ist.
    - usw.
  - **kommensurabel**: „Wechselwegnahme“ endet nach endlich vielen Schritten.
  - **inkommensurabel**: Prozess bricht nicht ab.

Schülerduden Mathematik II, S. 202.

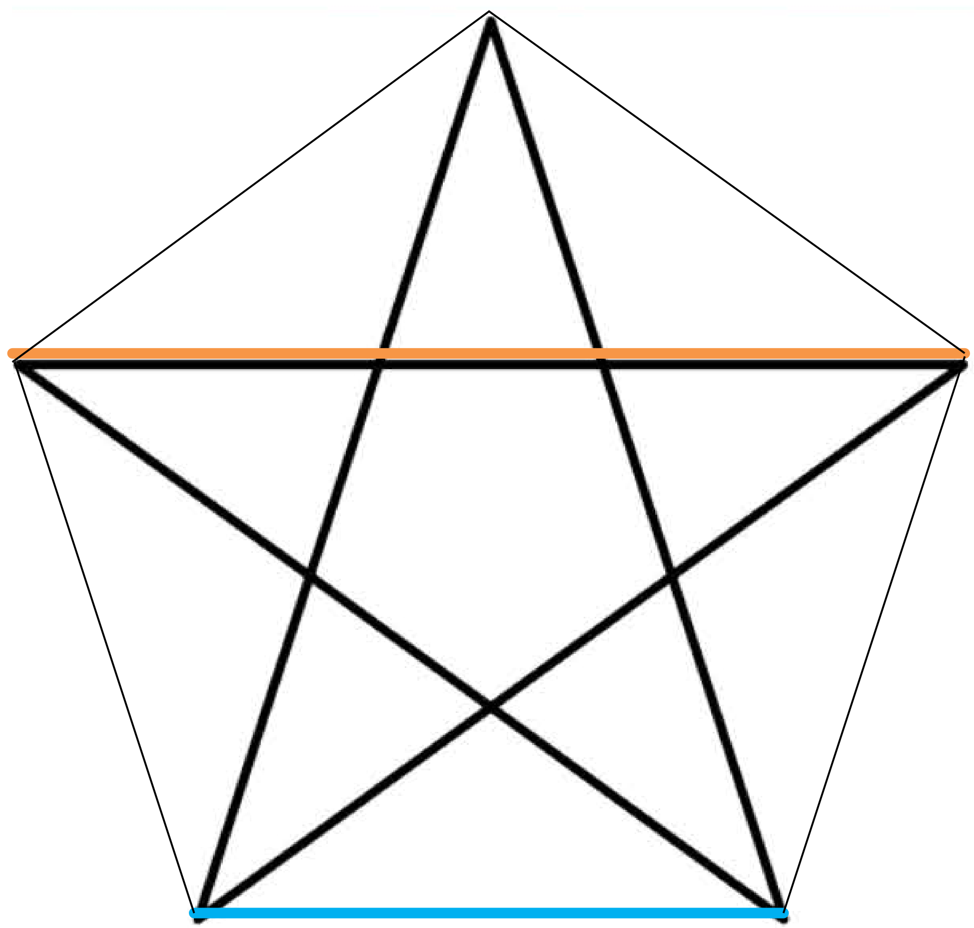
Inkommensurable Strecken im Pentagramm



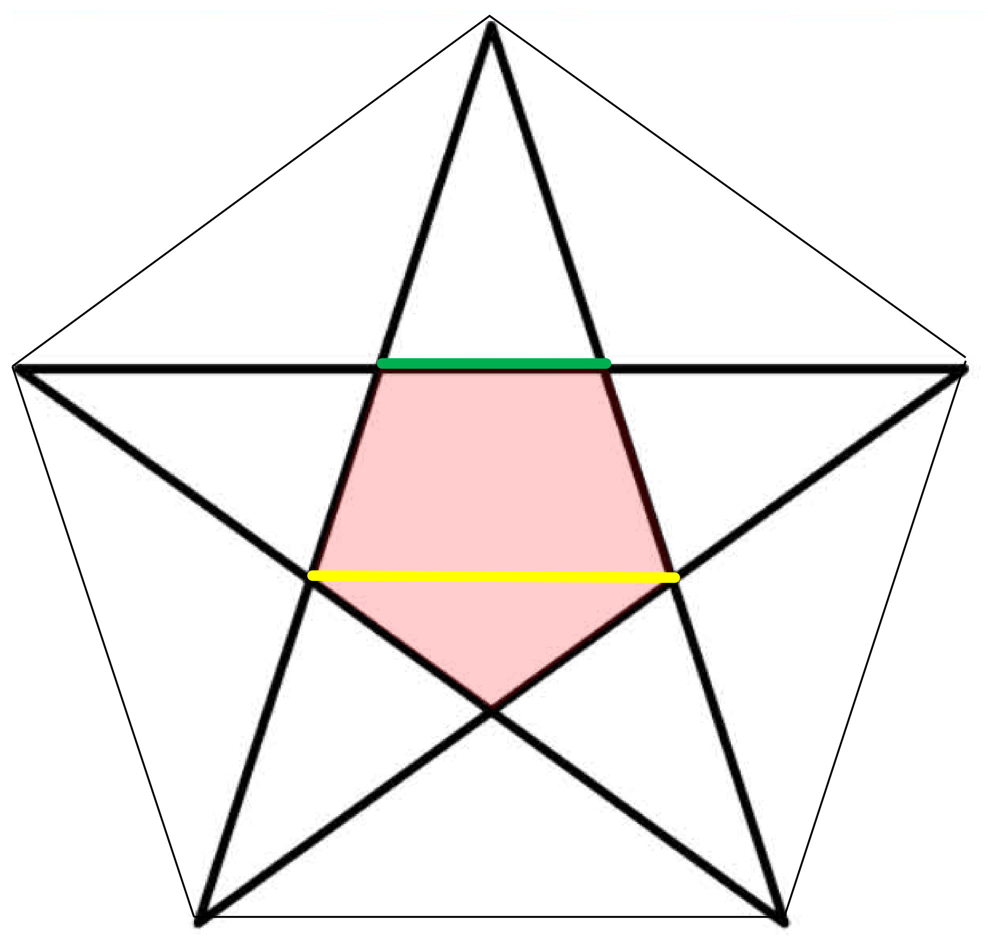
Inkommensurable Strecken im Pentagramm



Inkommensurable Strecken im Pentagramm



Inkommensurable Strecken im Pentagramm



Mathematiker und Akusmatiker

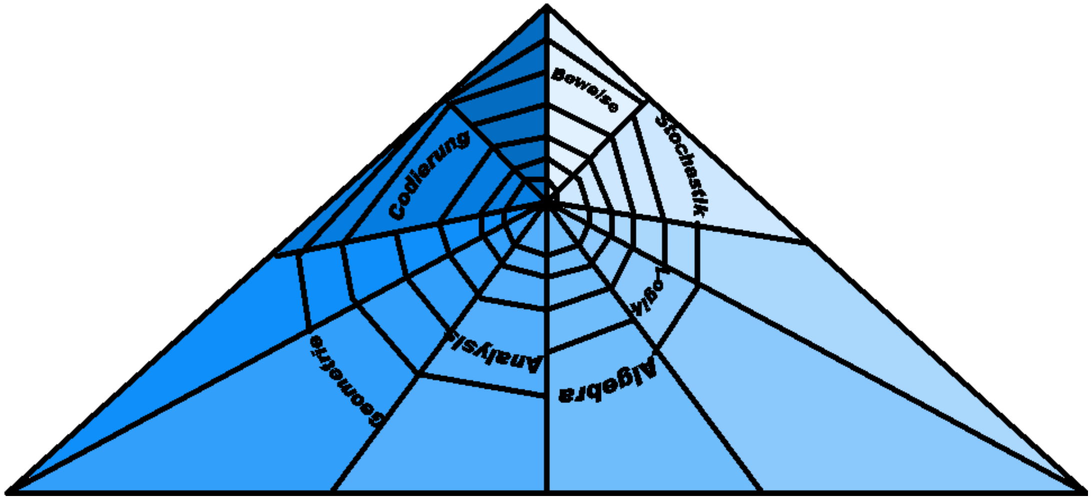
- Nach dem Tod von Pythagoras: Zerfall in zwei Gruppen
  - Mathematiker ($\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\iota$) = Wissenschaftler/Lehrer
  - Akusmatiker ($\alpha\kappa o\upsilon\sigma\mu\alpha\tau\iota\kappa o\iota$) = Zuhörer/Jünger
- Mathematiker beschäftigen sich mit Mathemata (schriftlich festgehaltenes Wissen, Lernen; Fragen stellen) -> (Natur)wissenschaftliches Denken
- Akusmatiker beschäftigen sich mit Akusmata (mündlich mitgeteiltes ‚Gehörtes'; schweigend zuhören) -> (religiöse) Verhaltensregeln

Mathematiker und Akusmatiker

- Nach dem Tod von Pythagoras: Zerfall in zwei Gruppen
  - Mathematiker ($\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\iota$) = Wissenschaftler/Lehrer
  - Akusmatiker ($\alpha\kappa o\upsilon\sigma\mu\alpha\tau\iota\kappa o\iota$) = Zuhörer/Jünger
- Mathematiker beschäftigen sich mit Mathemata (schriftlich festgehaltenes Wissen, Lernen; Fragen stellen) -> (Natur)wissenschaftliches Denken
- Akusmatiker beschäftigen sich mit Akusmata (mündlich mitgeteiltes ‚Gehörtes'; schweigend zuhören) -> (religiöse) Verhaltensregeln

Materialien

- [Arbeitsblatt]()



GDM-Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“

Schriftenreihe -> Band 4 (erscheint Anfang 2016)

http://www.math-edu.de/Vernetzungen.html

Weitere Beispiele

Elemente „Konkreter Kunst“

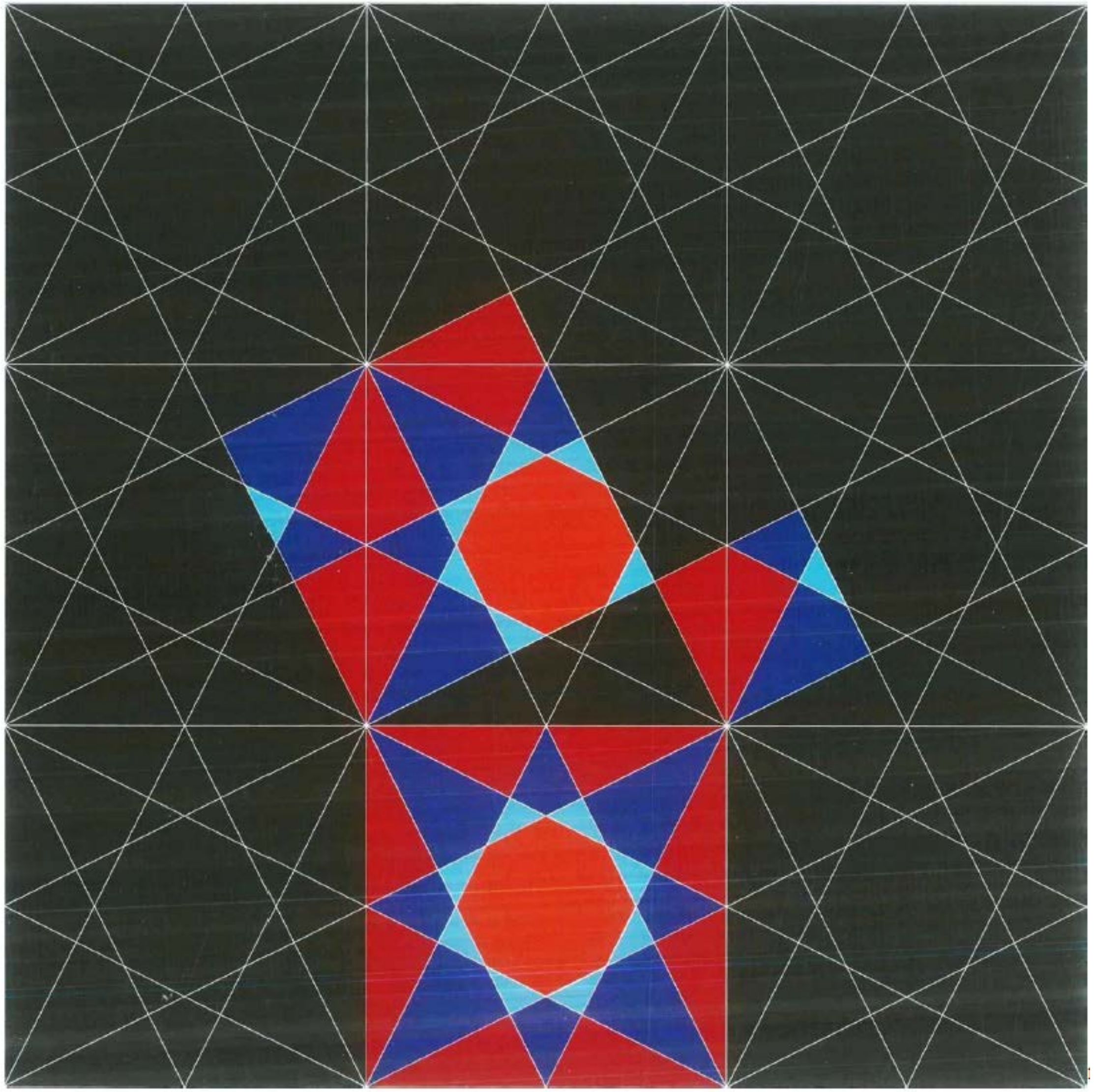
Bereits fertig …

- „Zahlenfolgen“ in „Das Mathematikbuch 4“, S. 32/33
- „Binome multiplizieren“ in „Das Mathematikbuch 4“, S. 14/15
- „Centennium von Eugen Jost“ in „Mathematische Begabungen fördern“ bzw. FibonacciProject (engl.)
- …

Hardys Taxi (© Eugen Jost, CH-3604 Thun, Acryl auf Leinwand, 60 cm x 60 cm, Abbildung entnommen aus Baptist, 2008, S. 13)

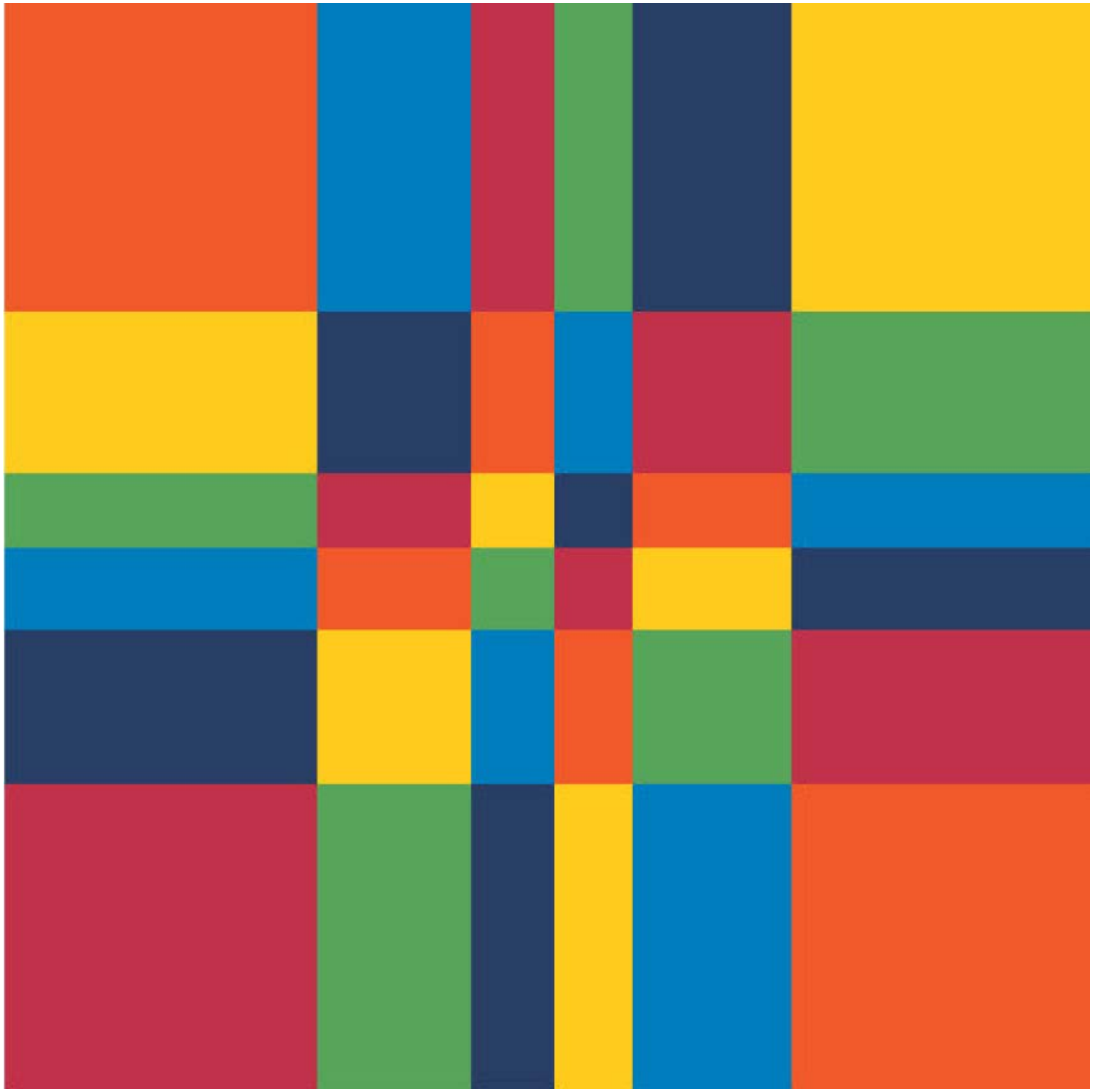
Ein Spaziergang mit Herrn Euler (© Eugen Jost, CH-3604 Thun, Acryl auf Leinwand, 60 cm x 60 cm, Abbildung entnommen aus Baptist, 2008, S. 31)

3,14159 (© Eugen Jost, CH-3604 Thun, Acryl auf Leinwand, 60 cm x 60 cm, Abbildung entnommen aus Baptist, 2008, S. 69)

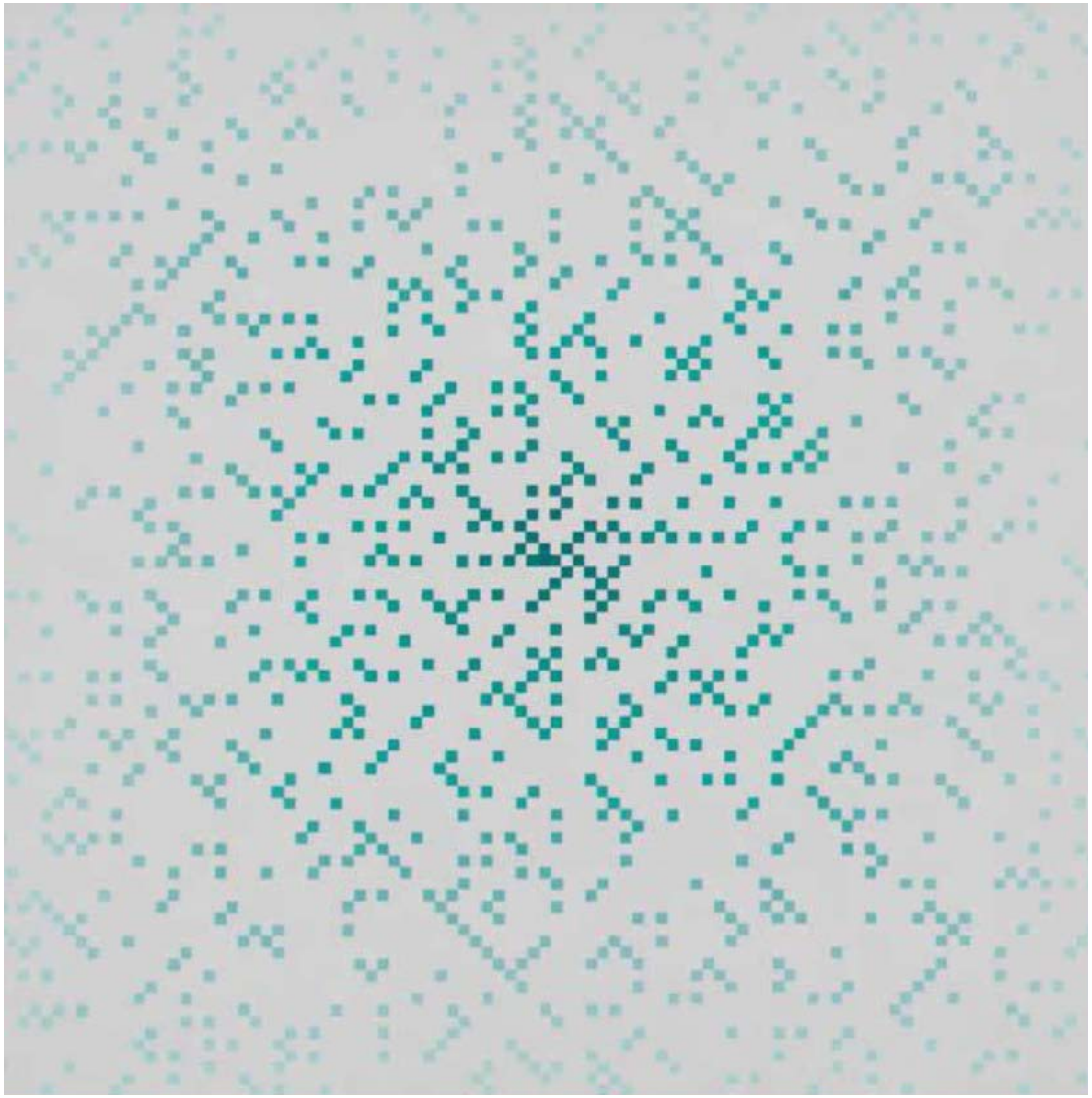


Knauthiger Pythagoras(© Eugen Jost, Abbildung entnommen aus Baptist, 2013, S. 88)

Pegasus / Symmetriezeichnung 105 (© M. C. Escher, 1959, Abbildung entnommen aus Dobrowolski, 2010, S. 166)

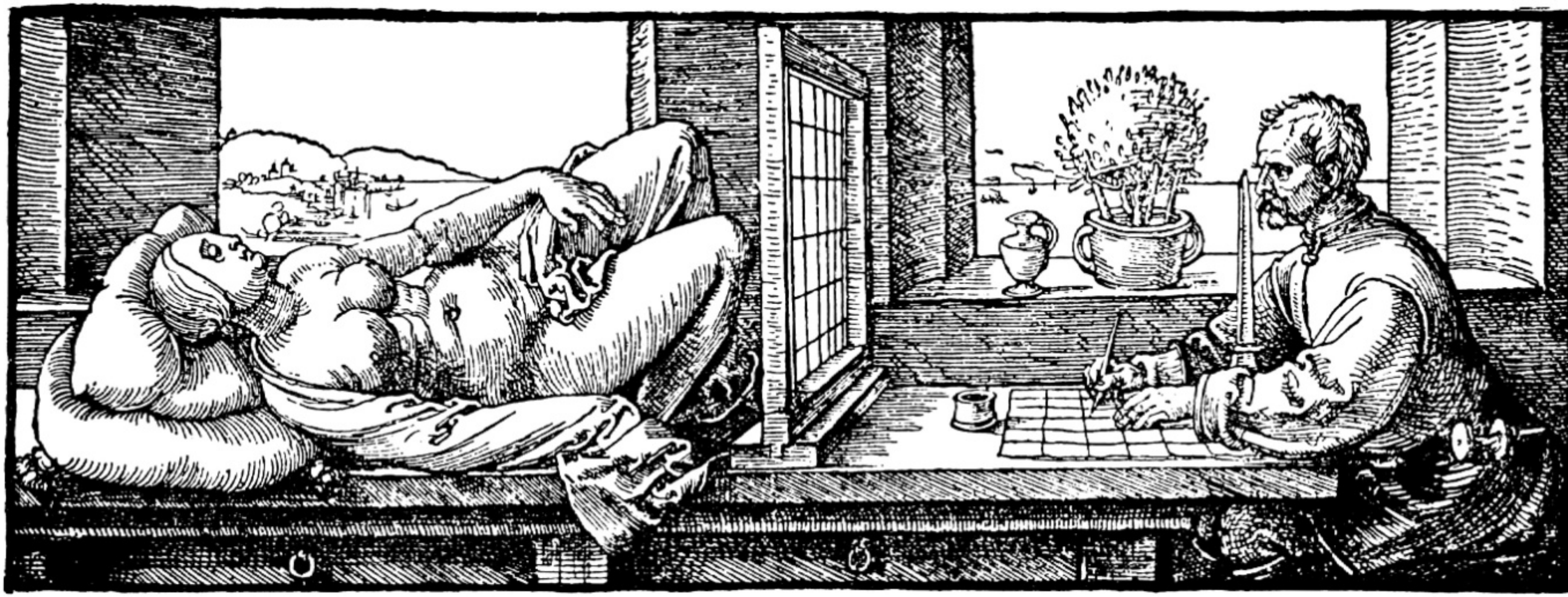


Sechs komplementäre Farbreihen (© Richard Paul Lohse, 1983)

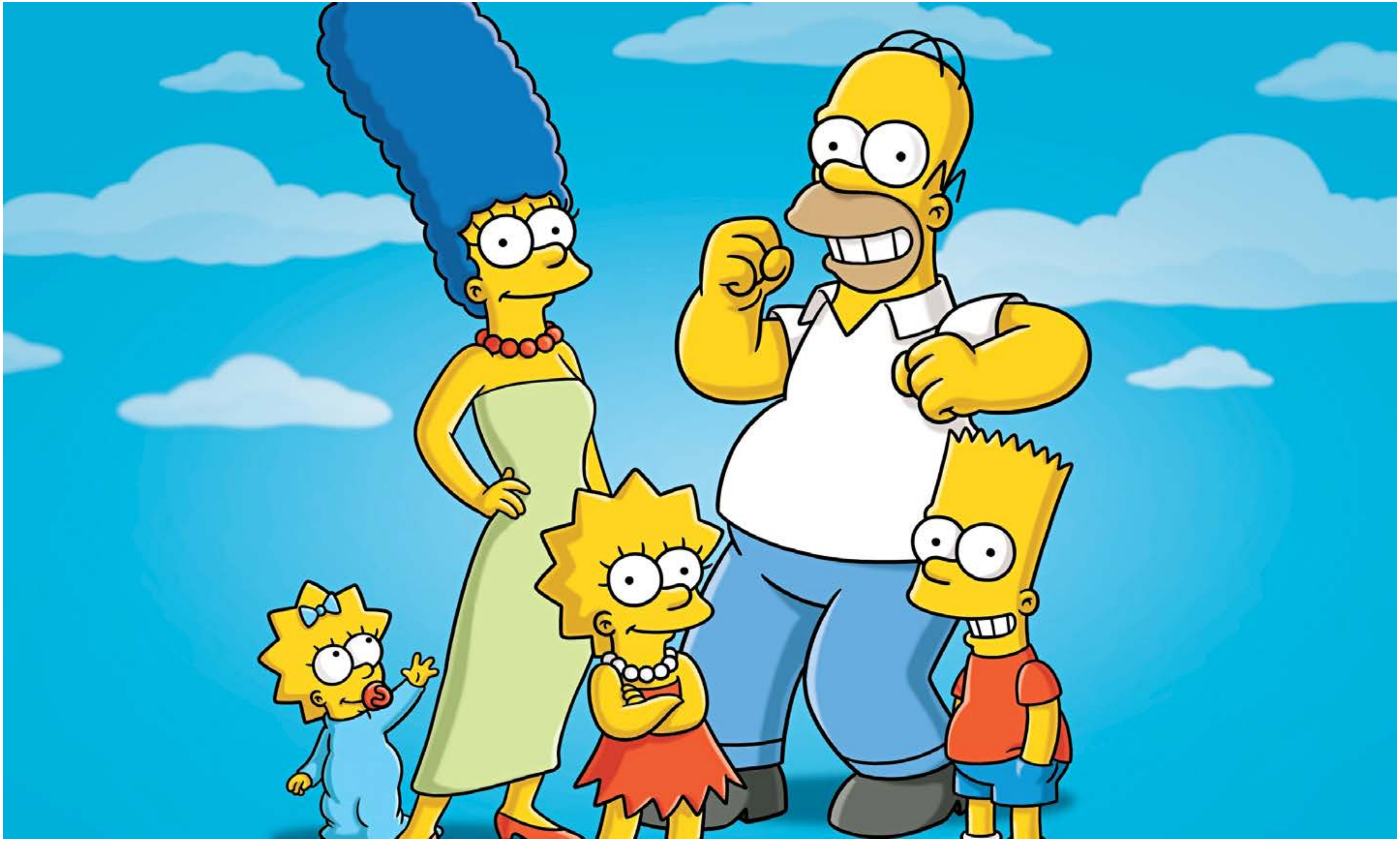


Primzahlenbild 1 (© Suzanne Daetwyler, Acryl auf Leinwand, 96 cm x 96 cm, 1996)

Zufällige Verteilung von 40 000 Quadraten, den geraden und ungeraden Zahlen eines Telefonbuches folgend, 50 % grau, 50 % gelb (© François Morellet, Öl auf Leinwand, 130 cm x 130 cm, 1962. Sammlung Peter C. Ruppert, Museum im Kulturspeicher)



Dürers Holzschnitt "Der Zeichner des liegenden Weibes“, aus Lambacher Schweizer, Kl 8, S.150



(http://cs.ucsb.edu/~zhelfinstein/simpsons/image.jpg)

Literatur

- Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., Nydegger, A., Wälti, B., Wieland, G. (2003): mathbu.ch 8. Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I. Bern, Zug: schulverlag blmv, Klett & Balmer.
- Baptist, P. (2008) (Hrsg.). Alles ist Zahl. Köln: Kölner Universitäts-Verlag.
- Baptist, P. (1998): Pythagoras und kein Ende?, Leipzig: Klett.
- Baptist, P., Jost, E., Miller, C. (2013) (Hrsg./Bearb.): Alles ist Zahl, Mathematik andersARTig, Univ. Bayreuth, Bayreuth.
- Bartkovich, K. G. & George, W. C. (1980): Teaching Gifted and Talented in the Mathematics Classroom. Washington, D.C.: Na-tional Education Association.
- Bauer, L.A. (1988). Mathematik und Subjekt. Deutscher Universi-tätsverlag.
- Bikner-Ahsbahs, A. (1999): Mathematikinteresse: eine Studie mit mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern. Hildesheim: Franzbecker.
- Bortolazzi, S., Distel, B., Feuerlein, R., Joerchel, M., Walter, H. (2005): Mathematik 7. Unterrichtswerk für das G8. Munich: bsv.
- Brandl, M. (2010). Narrative Didactics in Mathematical Education: an innovative Didactical Concept. In T. Bianco & V. Ulm (Ed.): Mathematics Education with Technology – Experiences in Europe, Augsburg: University of Augsburg, S. 103 – 110.
- Brandl, M. (2009). The vibrating string – an initial problem for modern mathematics: historical and didactical aspects. In I. Witzke (Ed.), Mathematical practice and development throughout history: Proceedings of the 18th Novembertagung on the history, philosophy and didactics of mathematics (p. 95-114). Berlin: logos.
- Bruner, J. (1986): Actual Minds, Possible Worlds. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.

Literatur

- Csíkszentmihályi, M. (1975). Beyond Boredom and Anxiety. The Experience of Play in Work and Games, San Francisco, Washington, London: Jossey-Bass Publishers.
- Dobrowolski, M. (2010): Mathematische Exkursionen. Gödel, Escher und andere Spiele, Oldenbourg, München.
- Greenes, C. (1981): Identifying the Gifted Student in Mathematics. Arith. Teacher 28, H. 6, S. 14-17.
- Hadamard, J. (1945): An essay on The psychology of invention in the mathematical field. Princeton University Press.
- Holton, G., Rutherford, J. & Watson, F. (1970): The Project Physics Course. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main.
- Kantorovich, A. (1993): Scientific Discovery: Logic and Tinkering. Albany: State University of New York.
- Kießwetter, K. (1992): „Mathematische Begabung" – Über die Komplexität der Phänomene und die Unzulänglichkeiten von Punktbewertungen. MU 38 (1), S. 5-10.
- Klassen, S. (2009): The Construction and Analysis of a Science Story: A Proposed Methodology. Science & Education, 18, 401-423.
- Klassen, S. (2006): A theoretical framework for contextual science teaching. Interchange, 37, 1-2, 31-61.
- König, G. (1986): Begabung und Begabungsförderung – ein Litera-turüberblick über neuere Ergebnisse unter besonderer Berücksichtigung der mathematischen Begabung. ZDM Jg. 18, H. 3, S. 81-98.
- Krapp, A. (1992): Das Interessenkonstrukt. In: A. Krapp & M. Prenzel: Interesse, Lernen, Leistung. Münster:Aschendorff, S. 297-329.
- Kruteskii, V.A. (1976): The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Chicago, London.
- Kubli, F. (2006): Teachers should not only Inform but also Enter-tain. Science & Education

Literatur

- Kubli, F. (2005b): Science Teaching as a Dialogue – Bakthin, Vygotsky and some Applications in the Classroom. Science & Education, 14, 501-534.
- Kubli, F. (2005a): Mit Geschichten und Erzählungen motivieren: Beispiele für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Un-terricht. Cologne: Aulis Deubner.
- Kubli, F. (2002): Plädoyer für Erzählungen im Physikunterricht: Geschichte und Geschichten als Verstehenshilfen – Ergebnisse einer Untersuchung (2nd ed). Cologne: Aulis Deubner.
- Myasishchev, V.N. (1960): Abilities and needs. Uchenye Zapiski LGU, 287.
- Myasishchev, V.N. (1962): The problem of abilities in Sovjet psy-chology and its immediate tasks. In: V. N. Myasishchev (Ed.): Problems of abilities. Moscow: APN Press.
- Norris, S., Guilbert, M., Smith, M., Shahram, H. & Phillips, L. (2005): A theoretical framework for narrative explanation in science. Science Education, 89, 4, 535-554.
- Poincaré, H. (1973): Wissenschaft und Methode. Unveränderter Nachdruck der Ausgabe Leipzig und Berlin 1914, Stuttgart: Teubner.
- Ruelle, D. (2007): The mathematician's brain. Princeton University Press.
- Sinclair, N., Healy, L. & Sales, C., O., R. (2009): Time for telling stories: narrative thinking with dynamic geometry. ZDM Mathematics Education, 41, 441-452
- Wood, D., Bruner, J. & Ross, G. (1976): The Role of Tutoring in Problem-Solving. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17, 89-100.

Sekundärliteratur in Klassen (2006)

Barnes, D. (1992). *From communication to curriculum* (2nd ed.). Portsmouth, NH: Boynton/Cook Publishers.

Chomsky, N. (1959). A review of B.F. Skinner's verbal behaviour. *Language*, 35(1), 26–58.

Cohen, I.E. (1993). A sense of history in science. *Science & Education, 2*, 252–277.

Damasio, A.R. (1994). *Descartes' error: Emotion, reason, and the human brain*. New York: G.P. Putnam

Ebenezer, J.V. & Fraser, D.M. (2001). First year chemical engineering students' conceptions of energy in solution processes: Phenomenographic categories for common knowledge construction. *Science Education, 85(5)*, 509–535.

Egan, K. (1989a). The shape of the science text: A function of stories. In S de Castell, A. Luke, & C. Luke, (Eds.), *Language, authority and criticism: Readings on the school textbook* (pp. 96–108). New York: The Falmer Press.

Egan, K. (1989b). Memory, imagination, and learning: Connected by the story. *Phi Delta Kappan, 70(6)*, 455–473.

Fowler, M. (2003). Galileo and Einstein: Using history to teach basic physics to nonscientists. *Science & Education 12*, 229–231.

Glasersfeld, E. von. (1990). Environment and communication. In L. P. Steffe & T. Wood (Eds.). *Transforming children's mathematics education: international perspectives* (pp. 30–38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Holbrow, C.H., Amato, J.C., Galvez, E. J., & Lloyd, J.N. (1995). Modernizing introductory physics. *American Journal of Physics, 63*, 1078–1090.
Jung, W. (1994). Toward preparing students for change: A critical discussion of the contribution of the history of physics in physics teaching. *Science & Education, 3*, 99–130.
Howard, P.J. (2000). *The owner's manual for the brain: Everyday applications from mind-brain research* (2nd ed.). Austin, TX: Bard Press.
Kipnis, N. (1996). The liistorical-investigative' approach to teaching science. *Science & Education, 5*, 271–292.
Koul, R. & Dana, R. (1997). Contextualized science for teaching science and technology. *Interchange, 28(2&3)*, 121–144.
Kubli, F. (1999). Historical aspects in physics teaching: Using Galileo's work in a new Swiss project. *Science & Education, 8(2)*, 137–150.
Kuhn, T. (1963). The function of dogma in scientific research. In A.C. Crombie (Ed.), *Scientific change* (pp. 347–369). New York: Basic Books.
Mandler, J. (1984). *Stories, scripts, and scenes: Aspects of schema theory*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Mott, B.W., et al. (1999). Towards narrative-centered learning environments. *Proceedings of the AAAIFall Symposium on Narrative Intelligence.*

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York: Columbia University Press.
Noddings, N. & Witherell, C. (1991). Epilogue: Themes remembered and foreseen. In C. Witherell & N. Noddings (Eds.), *Stories lives tell* (pp. 279–280). New York: Teachers College Press.
Resnick, L.B. & Resnick, D.P. (1992). Assessing the thinking curriculum: New tools for educational reform. In B. R. Gifford & M. C. O'Connor (Eds.), *Changing assessments: Alternative views of aptitude*, *achievement and instruction* (pp. 37–75). Boston: Kluwer.
Skinner, B.F. (1954). The science of learning and the art of teaching. *Harvard Educational Review, 24*, 86–97.
Skinner, B.F. (1965). Reflections on a decade of teaching machines. In R. Glaser (Ed.), *Teaching machines and programmed learning: II. Data and directions* (pp. 5–20). Washington, DC: National Education Association.
Vygotsky, L.S. (1986). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press. Orginal work published 1934.
Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, et al., Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.
Whitehead, A.N. (1929). *The aims of education and other essays*. New York: McMillan.

Sekundärliteratur in Norris et al. (2005)

Bruner, J. (1986). Possible worlds, actual minds. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Coles, R. (1989). The call of stories: Teaching and the moral imagination. Boston, MA: Houghton Mifflin.
Millar, R., & Osborne, J. (Eds.) (1998). Beyond 2000: Science education for the future. London: King's College London, School of Education.
Moffett, J. (1983). Teaching the universe of discourse. Portsmouth, NH: Heinemann.
Phelan, J. (1996). Narrative as rhetoric: Technique, audiences, ethics, ideology. Columbus: OH: Ohio State University Press.
Richardson, L. (1990). Narrative and sociology. Journal of Contemporary Ethnography, 19(1), 116–135.
Tilley, A. (1992). Plot snakes and the dynamics of narrative experience. Gainesville, FL: University Press of Florida.

Danke für die Aufmerksamkeit

und

Viel Spaß!