Prof. Dr. Rosenberger

Fakultät für Informatik und Mathematik

Schöne Zahlen

Lehrerfortbildung – 18.12.2019

Schönheit in der Mathematik

Aufgabe 1

Geben Sie einen rein zahlentheoretischen Beweis für die Klassifikation der primitiven Pythagoreischen Tripel an.

Hinweis: Sei $a^2 + b^2 = c^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$. Schreiben Sie

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$$

mit a gerade (es ist notwendig a oder b gerade!). Zeigen Sie zunächst $\mathrm{ggT}(c-a, c+a) = 1$ und damit $c + a = x^2, c - a = y^2$ für $x, y \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus $a = \frac{x^2-y^2}{2}, b = xy$ und $c = \frac{x^2+y^2}{2}$.

Aufgabe 2

a) Eine Zahl der Form $M_n = 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, heißt *Mersenne Zahl*. Ist M_n eine Primzahl, so nennen wir M_n eine *Mersennesche Primzahl*.

Zeigen Sie: Ist M_n eine Primzahl, so ist n selbst eine Primzahl.

Bemerkung: Für Mersennesche Primzahlen gibt es den Lucas-Lehmer Test: Sei $p \geq 3$ eine Primzahl. Definiere rekursiv die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $S_1 = 4$ und $S_n = S_{n-1}^2 - 2$ für $n \geq 2$. Damit ist $M_p = 2^p - 1$ eine Primzahl genau dann wenn $M_p \mid S_{p-1}$.

Dieser Test ist die Grundlage für das Suchprojekt GIMPS nach großen Primzahlen.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma(n) = \sum\limits_{\substack{d|n \\ d\geq 1}} d$ die Summe aller positiven Teiler von n.

Zeigen Sie: Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $\sigma(n) \cdot \sigma(m) = \sigma(nm)$ falls $ggT(n, m) = 1$.

c) Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt vollkommene Zahl falls $\sigma(n) = 2n$.

Beispiele: $n = 6, 28, 496, 8128$.

Charakterisierung: Sei $n = 2^{s-1}b$ mit $s, b \in \mathbb{N}, s \geq 2$ und b ungerade. Dann sind äquivalent:

(1) b ist eine Mersennesche Primzahl und $b = 2^s - 1$.

(2) n ist vollkommen.

Zeigen Sie: (1) $\Rightarrow$ (2).

Bemerkung: Der Beweis der Richtung (2) $\Rightarrow$ (1) ist etwas aufwendiger. Einen Beweis dafür findet man in dem Buch "Number Theory" von B. Fine und G. Rosenberger (Birkhäuser-Springer, 2016). Dort wird auch der Lucas-Lehmer Test explizit behandelt.

d) Die m-te Dreieckszahl $T_m, m \in \mathbb{N}$, ist definiert durch

$$T_m = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Zeigen Sie: Ist n eine gerade vollkommene Zahl, so ist n eine Dreieckszahl.

Bemerkung: Es ist nicht bekannt, ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt.

Aufgabe 3

Wir setzen $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$, und für $n \geq 3$ sei f_n die Anzahl aller $0-1$ Folgen der Länge $n-2$, bei denen keine zwei Einsen nebeneinander stehen. Zeigen Sie:

a) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$.

b) $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ für $n \geq 1$, wobei $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die Goldene-Schnitt-Zahl ist und $\beta = -\alpha^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Hinweis: α und β sind die Lösungen der Gleichung $x^2 = x + 1$, also gilt für $n \geq 1$:

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \text{ und } \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$$

Bemerkung: Die Zahlen f_n, $n \geq 0$, heißen die *Fibonacci-Zahlen*. Diese haben viele Eigenschaften, etwa:

(1) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$ für $n \geq 1$.

(2) $f_1^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ für $n \geq 1$.

(3) $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$ für $n, m \geq 1$.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, und damit insbesondere $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ für $n \geq 1$.

(5) $ggT(f_n, f_m) = f_{ggT(n,m)}$ für $n, m \geq 1$.

Beweise hierfür findet man in dem Buch "Number Theory" von B. Fine und G. Rosenberger (Birkhäuser-Springer, 2016).

c) Zeigen Sie die Eigenschaften (2) und (4).