Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

27. Juli 1998

# Lösungshinweise zur Klausur zur Vorlesung Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

**Aufgabe 1:** Ja, z.B. $\frac{30}{100} > \frac{30}{101}$ und $\frac{20}{200} > \frac{10}{101}$, aber $\frac{50}{300} < \frac{40}{202}$.

**Aufgabe 2:** Sei $p_2$ Annas Gewinnwahrscheinlichkeit, und $p_1$ ihre Gewinnwahrscheinlichkeit beim Spiel “Erstes Wappen gewinnt”. Dann gilt $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1}{3}$, und je nachdem was Anna zuerst wirft, ergibt sich eines der beiden Spiele mit vertauschten Rollen, also $p_2 = \frac{1}{2}(1-p_1) + \frac{1}{2}(1-p_2)$. Es folgt $p_2 = \frac{4}{9}$, d.h. Anna sollte 0,80 EU und Berta sollte 1 EU Einsatz zahlen.

**Aufgabe 3:** Vgl. Vorlesung, Beispiel 4.11. Er muß 276 Eier kaufen.

**Aufgabe 4:** (Vgl. ÜA 41) Ist $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ die Lebensdauer der $i$-ten Leuchtröhre, so ist $X = \min\{X_1, \ldots, X_{30}\}$ wieder exponentialverteilt, und zwar zum Parameter $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{30} = 30$, d.h. es gilt $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{30}\ Jahr = 12\ Tage\ 4\ Stunden.$ Wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung dauert es bis zum zweiten Defekt wieder genauso lange.

**Aufgabe 5:** (Vgl. ÜA 48) Sei $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ der Inhalt des $i$-ten Maßkrugs, und sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ für $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt $E(X_i) = 0,75$ und $\sigma(X_i) = 0,25$, also $E(S_n) = 0,75n$ und $\sigma(S_n) = 0,25\sqrt{n}$. Nach dem ZGS folgt

$$P(S_n \leq 1000) \geq 0,95 \iff P(S_n^* \leq \tfrac{1000-0,75n}{0,25\sqrt{n}}) \geq 0,95 \iff \tfrac{1000-0,75n}{0,25\sqrt{n}} \geq 1,65$$

woraus sich $n \leq 1313,4$ ergibt. Also rechnet der Wirt mit einem Gewinn von $1313 \cdot 5,40EU - 400EU = 6690,2EU$.

**Aufgabe 6:** (Vgl. ÜA 25 und 50) Sind $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ die jährlichen Erträge des DAX bzw. REXP, so ist $X = aX_1 + bX_2$ mit $a + b = 1$ der Ertrag des Portfolios aus $a$ Prozent DAX und $b$ Prozent REXP. Nach Voraussetzung gilt $e_1 = E(X_1) = 1,112$ (!) und $c_{11} = \mathrm{Var}(X_1) = 0,241^2 \approx 0,05808$ ebenso wie $e_2 = E(X_2) = 1,077$ und $c_{22} = \mathrm{Var}(X_2) = 0,051^2 \approx 0,0026$. Die Kovarianz ist $c_{12} = \varrho(X_1, X_2)\sigma(X_1)\sigma(X_2) \approx 0,0035643$. Für das Portfolio folgt $e = E(X) = ae_1 + (1-a)e_2$ sowie

$$\begin{aligned} v = \mathrm{Var}(X) &= a^2 c_{11} + a(1-a)c_{12} + (1-a)^2 c_{22} \\ &= \left(\tfrac{e-e_2}{e_1-e_2}\right)^2 c_{11} + 2\left(\tfrac{e-e_2}{e_1-e_2}\right)\left(\tfrac{e_1-e}{e_1-e_2}\right)c_{12} + \left(\tfrac{e_1-e}{e_1-e_2}\right)^2 c_{22} \\ &\approx 43,715e^2 - 94,108e + 50,65 \end{aligned}$$

Auf dieser Parabel, die die effiziente Grenze beschreibt, ist nach der MEL-Regel derjenige Punkt zu wählen, für den $E(\ln X) \approx \ln(e) - \frac{1}{2}\frac{v}{e^2}$ maximal ist. Ableiten liefert $\frac{1}{e} - 47,0515\frac{1}{e^2} + 50,649\frac{1}{e^3} = 0$, also $e \approx 1,102532$ und damit $a = 0,7295$, $b = 0,2705$.

Es sind demnach stets 72,95 Prozent in den DAX und 27,05 Prozent in den REXP zu investieren. Das Portfolio ist jährlich zu rebalancieren. Der erwartete Gewinn beträgt 10,25 Prozent pro Jahr bei einer Standardabweichung von 18,8 Prozent. Nach 40 Jahren werden aus dem Erbe 1,488 Millionen Euro.