Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

15. Mai 1998

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 2: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 6: a) Ein Prüfer hat 50 Standardfragen, von denen er in jeder Prüfung sechs zufällig auswählt. Ein Student kennt die Antwort auf 30 Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die Prüfung besteht, wenn er dazu mindestens drei Fragen richtig beantworten muß?

b) In einer Überraschungseiersaison gibt es 120 verschiedene Spielzeuginhalte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man von jedem Inhalt mindestens ein Exemplar hat, wenn man 500 Überraschungseier kauft?

Aufgabe 7: a) Von drei Münzen hat eine zwei silberne Seiten, eine zwei goldene, und eine eine silberne und eine goldene. Die Münzen werden zufällig auf drei Fächer verteilt. Man öffnet ein Fach und erblickt eine goldene Seite. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die andere Seite dieser Münze ebenfalls golden?

b) Bei einem Fernsehquiz befindet sich hinter genau einer von drei Türen ein Preis, und der Showmaster weiß hinter welcher. Der Kandidat wählt eine Tür. Dann öffnet der Showmaster eine der beiden anderen Türen, hinter der sich kein Preis verbirgt. Der Kandidat kann nun die gewählte Tür öffnen oder die andere noch verschlossene Tür. Lohnt es sich für ihn zu wechseln?

Aufgabe 8: Karl und Zacharias werfen wiederholt eine Münze. Wenn Kopf kommt, erhält Karl einen Punkt, wenn Zahl kommt Zacharias. Wer zuerst N Punkte hat gewinnt. Wie groß ist Karls Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn er gerade n Punkte hat und Zacharias m?

Aufgabe 9: Gewisse Würfel haben jeweils gleichwahrscheinliche Seiten mit Augenzahlen aus $\{1, 2, \ldots, 6\}$, die sich zu 21 addieren. Wir sagen, ein Würfel besiege den anderen, wenn er bei genügend vielen Würfen öfter eine höhere Augenzahl zeigt als der andere. Entscheiden Sie (evtl. mit Hilfe von Maple), ob es drei solcher Würfel gibt, die sich reihum besiegen.

Aufgabe 10: (Der große Aktienzock)

Ein Sparer besitze $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 1000000\}$ Euro. Um sein Sparziel "1 Million Euro" zu erreichen, habe er zwei Strategien zur Auswahl:

(I) *Der große Aktienzock:* Ist $x \leq 500000$ Euro, so kauft der Sparer für x Euro eine riskante Aktie. Nach einem Jahr steigt die Aktie mit Wahrscheinlichkeit p auf das Doppelte, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ verliert der Sparer sein Geld vollständig. Ist $500000 < x < 1000000$, so riskiert der Sparer $1000000 - x$ Euro. Nach einem Jahr wiederholt er das Verfahren.

(II) *Die Sparbuchtaktik:* Der Sparer legt alles aufs Sparbuch. Mit Wahrscheinlichkeit p erhält er $1,5$ Prozent Zins im Jahr, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ verliert er $1,5$ Prozent des Angesparten, weil mittlerweile die Inflation stark angezogen hat.

Sei $f_p : [0, 1000000] \longrightarrow [0, 1]$ die Funktion, für die $f_p(x)$ angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Sparer im Fall (I) irgendwann sein Ziel erreicht.

a) Beschreiben Sie $f_p(x)$ rekursiv. Berechnen Sie $f_p(400000)$ explizit.

b) In Abhängigkeit von p, bestimmen Sie die maximale Anzahl von Rekursionen, die notwendig ist, um $f_p(x)$ auf zehn Nachkommastellen genau zu berechnen.

c) Schreiben Sie eine Maple-Prozedur $\texttt{Zock}(p, x)$, die $f_p(x)$ auf zehn Nachkommastellen genau berechnet. (Können Sie auch eine Prozedur schreiben, die $f_p(x)$ für ganze Zahlen x exakt berechnet?)

d) Beweisen Sie, daß die Funktion $f_p(x)$ stetig und monoton steigend ist.

*e)** Zeigen Sie, daß die Funktion $f_p(x)$ fast überall differenzierbar ist und $f_p'(x) = 0$ erfüllt.

*f)** In Abhängigkeit von p, bestimmen sie die für den Sparer günstigere Strategie. Überlegen Sie sich zuerst, was günstiger hier überhaupt heißen könnte. Implementieren Sie auch die Gewinnwahrscheinlichkeit bei (II) und vergleichen Sie sie für verschiedene p und x mit $f_p(x)$.