Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

28. Mai 1998

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 4: Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Aufgabe 16: Beweisen Sie, daß die Pascal-Verteilung normiert ist.

Aufgabe 17: Ein Buch mit 400 Seiten enthalte 400 Druckfehler, die zufällig verteilt sind.

a) Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auf den beiden ersten Seiten je genau ein Druckfehler vorkommt.

b) Geben Sie eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß auf den letzten 100 Seiten mehr als 120 oder weniger als 80 Druckfehler sind.

Aufgabe 18: (Verdoppelungsstrategie beim Roulette)

Beim Roulette ("Monte-Carlo-Roulette") wird eine der Zahlen in $\{0, 1, \dots, 36\}$ ausgespielt. Setzt man auf "einfache Chance" (z.B. auf die ungeraden Zahlen "Impair"), so erhält man das Doppelte des Einsatzes im Erfolgsfall und die Hälfte des Einsatzes, wenn null ("Zero") kommt. Andernfalls ist der Einsatz weg.

Ein Spieler geht folgendermaßen vor: er setzt stets auf "Impair" und beginnt mit einer Einheit ("Jeton"). Verliert er seinen Einsatz ganz oder teilweise, so setzt er in der nächsten Runde das Doppelte. Gewinnt er, so beginnt er wieder mit einer Einheit.

Die Zufallsvariable X beschreibe den Reingewinn einer Serie von Spielen, die bis zum ersten Erfolg oder bis zum Erreichen des Höchsteinsatzes des Casinos dauert. Berechnen Sie die Verteilung und den Erwartungswert von X, wenn

a) es keinen Höchsteinsatz und unbeschränktes Kapital gibt,

b) der Höchsteinsatz 1024 Jetons beträgt.

Aufgabe 19: (Die Ü-Eier-Sammlung)

a) In einer bestimmten Ü-Eier-Saison gebe es n verschiedene Spielzeuginhalte. Ein Sammler besitze bereits m verschiedene Inhalte. Wieviele Ü-Eier muß er im Durchschnitt kaufen, bis er ein neues Spielzeug findet?

b) Zeigen Sie, daß der Sammler im Durchschnitt $n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})$ Eier kaufen muß, bis seine Sammlung vollständig ist, wenn er bei null anfängt. (Was ergibt sich im realistischen Fall $n = 120$?)

Aufgabe 20: (Die Vietnam-Lotterie 1970)

Im Jahre 1970 wurde in den USA die Einberufung von Rekruten zum Einsatz im Vietnamkrieg folgendermaßen durchgeführt. Den Tagen des Jahres wurden "zufällig" die Ränge $1, 2, \ldots, 366$ zugeordnet. Die beigefügte Maple-Datei *Vietnam.mws* enthält diesen "Zufallskalender". Nacheinander wurden nun die Männer mit den Rängen $1, 2, \ldots$ einberufen, solange bis die Armee genügend Rekruten hatte. Männer mit Geburtstagen niedriger Ränge wurden fast sicher einberufen, solchen mit hohen Rängen praktisch nie.

a) Schreiben Sie ein Maple-Programm `Mittelwerte`(K), das die Liste der zwölf Mittelwerte der Ränge der Tage jedes Monats berechnet. Diese Mittelwerte sollten "zufällig" um 183 schwanken. Formulieren Sie einige Beobachtungen.

b) Nun sei σ die Permutation von $\{1, 2, \ldots, 12\}$, für die $\sigma(i)$ die Anzahl der Monate angibt, deren Mittelwert kleiner oder gleich dem Mittelwert des i-ten Monats ist. Berechnen Sie σ sowie die Anzahl C der Paare $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, 12\}^2$ mit $i < j$ und $\sigma(i) < \sigma(j)$.

c) Beweisen Sie, daß die durchschnittliche Anzahl solcher Paare bei einer zufälligen Permutation von $\{1, 2, \ldots, 12\}$ gleich 33 ist.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine zufällig gewählte Permutation von $\{1, 2, \ldots, 12\}$ höchstens C solcher Paare?

e) Schreiben Sie ein Maple-Programm `SimulPairs`$()$, die möglichst viele Zufallskalender erzeugt, die Monatsmittelwerte berechnet und die Anzahl der steigenden Paare bestimmt. Finden Sie so einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich höchstens C steigende Paare ergeben. Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie?