Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

4. Juni 1998

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 5: Erwartungswerte und Standardabweichungen

Aufgabe 21: Sei $r \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Gibt es einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ der Erwartungswert $E(X_n)$ existiert und gleich r ist, und so daß $\lim_{n\to\infty} E(\exp \circ X_n) = \infty$ gilt? Hierbei bezeichne $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion.

Aufgabe 22: Eine Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei hypergeometrisch verteilt mit Parametern n, w, s, d.h. für $i = 0, \ldots, n$ gelte $P_X(i) = \binom{w}{i}\binom{s}{n-i}/\binom{w+s}{n}$. Beweisen Sie:

a) $E(X) = \frac{nw}{w-s}$

b) $\mathrm{Var}(X) = \frac{nws(w+s-n)}{(w+s)^2(w+s-1)}$

Aufgabe 23: Zu der Weihnachtsfeier eines Vereins bringt jedes der n erschienenen Mitglieder ein Geschenk mit. Diese Geschenke werden dann unter den Anwesenden verlost, so daß jeder ein Geschenk erhält.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten genau m Mitglieder ihr eigenes Geschenk zurück?

b) Wie kann man diese Wahrscheinlichkeit im Fall $n >> 0$ (z.B. 1. FC Bayern München) approximieren?

c) Wieviele Mitglieder erhalten durchschnittlich ihr Geschenk zurück?

Aufgabe 24: In der Losschachtel des Standes "Glückshafen" beim Volksfest befinden sich n Lose, unter denen sich m Gewinne (und $n - m$ Nieten!) verbergen. Ein Volksfestbesucher kauft solange ein Los und öffnet es, bis er (endlich!) einen Gewinn findet. Wieviele Lose muß er durchschnittlich kaufen?

Aufgabe 25: (Die moderne Portfoliotheorie (MPT) nach Markowitz)

Eine Summe von 1 Million Euro (EU) soll auf n verschiedene Anlageformen (z.B. Aktien, festverzinsliche Wertpapiere, Festgelder, Immobilien) verteilt werden. Der Ertrag einer Anlage in einem gewissen Zeitraum sei definiert als ihr Wert am Ende des Zeitraums geteilt durch den Anfangswert. Für eine Reihe von Zeiträumen $\{t_1, \ldots, t_r\}$ seien die Erträge der n Anlageformen bekannt und werden durch Zufallsvariable $X_i : \{t_1, \ldots, t_r\} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschrieben $(i = 1, \ldots, n)$. Das Ziel der MPT ist es, die Summe so auf die Anlageformen zu verteilen ("ein Portfolio zusammenzustellen"), daß der erwartete Gesamtertrag maximiert und die Standardabweichung ("das Risiko des Portfolios") minimiert wird. Man geht dabei von der naiven Annahme aus, daß sich von den vergangenen Erträgen und Korrelationen auf die zukünftigen schließen läßt.

a) Berechnen Sie den erwarteten Gesamtertrag und die Varianz des Portfolios aus den einzelnen Anlagesummen. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die "optimalen" Portfolios charakterisiert.

b) Zeigen Sie, daß es i.a. genau ein minimales Risiko σ_0 für das Portfolio gibt, und daß es für jedes $\sigma \geq \sigma_0$ genau ein Portfolio mit Risiko σ gibt, für das der erwartete Ertrag maximal ist.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Maple-Pakets `stats` die erwarteten Erträge, Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten der folgenden Anlageformen:

1) US-Aktien auf DM-Basis (S&P 500 Index),
2) deutsche Aktien (CDax Index bzw. Vorläufer davon),
3) deutsche Anleihen (5%ige Pfandbriefe),
4) das gute alte Sparbuch,
5) Gold !!!

Die Erträge dieser Anlageformen in den Jahren 1950 bis 1997 finden Sie in der beigefügten Datei "Markowitz.mws".

d) Berechnen Sie mit Maple im Fall c) das risikoärmste Portfolio sowie die Kurve der Erträge der optimalen Portfolios $E(\sigma)$ (die sogenannte "efficient frontier"). Verwenden Sie das Paket `plot`, um letztere graphisch darzustellen. Bestimmen Sie für einige Werte $\sigma \geq \sigma_0$ die zugehörigen optimalen Portfolios, z.B. für $\sigma = 0,1$ und $\sigma = 0,15$.