Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

10. Juni 1998

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 6: Erzeugende Funktionen

Aufgabe 26: Eine Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) definiert ist, sei Pascal-verteilt zu den Parametern $p \in]0,1]$ und $r \in \mathbb{N}_+$, d.h. es gelte $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ und $P_X(k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die erzeugende Funktion g_X von X.

b) Verwenden Sie g_X, um den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ zu berechnen.

Aufgabe 27: Eine Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) definiert ist, sei hypergeometrisch verteilt mit Parametern n, w, s.

a) Bestimmen Sie eine Formel für die erzeugende Funktion g_X von X.

b) Verwenden Sie g_X, um den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ zu berechnen.

c) Zu einer vorgegebenen Zahl $p \in]0,1]$ sei $s = \frac{1-p}{p} w$. Beweisen Sie, daß die Formel $\lim\limits_{w \to \infty} P_X(k) = b_{n,p}(k)$ für $k = 0, \ldots, n$ gilt, d.h. daß die Binomialverteilung ein Grenzwert der hypergeometrischen Verteilung ist.

d) Interpretieren Sie das Ergebnis von c) anschaulich mit Hilfe eines geeigneten Urnenmodells.

Aufgabe 28: Die Lösungszeit, die ein Student durchschnittlich für eine Übungsaufgabe benötigt, sei zwei Stunden. Die Standardabweichung liege dabei aber bei sechs Stunden. Wieviele Übungsaufgaben kann der Professor seinen Studenten jede Woche aufbrummen, wenn er wünscht, daß durchschnittlich mindestens 95 % der Studenten alle Aufgaben lösen können?

Hinweis: Der Professor nimmt an, daß seine Studenten Tag und Nacht arbeiten, abzüglich täglich acht Stunden Schlaf, wöchentlich sechs Stunden Vorlesung bzw. Übungen, sowie zwei Stunden Biergarten nach der Freitagsvorlesung.

Aufgabe 29: Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable, sei $\epsilon > 0$, und sei $f : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ eine monoton wachsende Funktion mit $f(\epsilon) > 0$. Zeigen Sie

$$P(\mid X - E(X) \mid \geq \epsilon) \leq \frac{1}{f(\epsilon)} E(f(\mid X - E(X) \mid)).$$

Aufgabe 30: (Simulation einer Kernreaktion)

Trifft ein Neutron auf den Kern eines Uranatoms, so kann es diesen spalten und dabei neue Neutronen erzeugen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei p_k die Wahrscheinlichkeit, daß genau k Neutronen entstehen. Diese treffen nach τ Sekunden auf weitere Uranatome. Für $n \in \mathbb{N}$ beschreibe die Zufallsvariable $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ die Anzahl der Neutronen, die bei den Kernspaltungen nach $n\tau$ Sekunden entstehen, wobei wir von $X_0 = 1$ ausgehen.

a) Bestimmen Sie $g_{X_1}(t)$ und beweisen Sie, daß die erzeugende Funktion von X_n gegeben ist durch $g_{X_n}(t) = \underbrace{g_{X_1} \circ \cdots \circ g_{X_1}}_{n \text{ mal}}(t)$

b) Berechnen Sie $E(X_n)$ aus $E(X_1)$ sowie $\mathrm{Var}(X_n)$ aus $\mathrm{Var}(X_1)$, falls die letztere Varianz existiert.

c) Zeigen Sie, daß die Kettenreaktion mit der Wahrscheinlichkeit $q = \inf\{t \geq 0 \mid g_{X_1}(t) - t = 0\}$ zum Stillstand kommt. (Letzteres bedeutet $X_n(\Omega) = \{0\}$ für $n >> 0$.) Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit für den Fall, daß X_1 geometrisch verteilt ist.

d) Zeigen Sie, daß die Bedingung $q < 1$ damit äquivalent ist, daß $E(X_1) > 1$ oder $p_1 = 1$ gilt.

e) Schreiben Sie eine Maple-Prozedur `Kettenreaktion`(L), die die Werte der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ bei einer vorgegebenen endlichen Liste von Wahrscheinlichkeiten $L = [p_0, p_1, \ldots, p_n]$ simuliert. Verifizieren Sie durch oftmalige Anwendung dieser Prozedur das Ergebnis von c).

f)* Im folgenden sei $E(X_1) > 1$ vorausgesetzt. Betrachten Sie für $i \geq 1$ die Zufallsvariable $Y_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $Y_i(\omega) = X_i(\omega)/E(X_1)^i$ für $\omega \in \Omega$. Überzeugen Sie sich durch Simulation mittels `Kettenreaktion`(L), daß die Folge $Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots$ für eine Menge Ω' von Elementen $\omega \in \Omega$ mit $P(\Omega') = 1$ gegen einen festen Wert $Y(\omega)$ konvergiert. Können Sie Formeln für den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen $Y : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$ erraten?

g)* Beweisen Sie die in f) empirisch gefundenen Formeln. Welche Folgerungen ergeben sich für das Wachstumsverhalten der Folge $X_0, X_1, X_2, \ldots$?