Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

17. Juni 1998

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 7: Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Aufgabe 31: Sei Ω eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{A}$ genau dann eine σ-Algebra ist, wenn die folgenden vier Eigenschaften erfüllt sind.

1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) Ist $A \in \mathcal{A}$, so gilt auch $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
3) Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so gilt auch $A \cap B \in \mathcal{A}$.
4) Sind für $n \geq 1$ paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ gegeben, so gilt $\biguplus_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 32: a) Zeigen Sie, daß alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borel-meßbar sind.

b) Beweisen Sie, daß die von allen offenen Intervallen und die von allen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ erzeugten σ-Algebren in $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ übereinstimmen.

Aufgabe 33: Zeigen Sie, daß durch die folgenden Funktionen Dichten gegeben sind, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$ definieren.

a) Für $\alpha, \beta > 0$ ist die *Weibull-Verteilung* mit Parametern α, β gegeben durch die Dichte

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, \infty[\\ x &\longmapsto \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Für $\kappa > 0$ und $\varphi \in \,]0, 2\pi]$ ist die *von-Mises-Verteilung* mit Parametern κ, φ gegeben durch die Dichte

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, \infty[\\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \cdot e^{\kappa \cos(x-\varphi)} & \text{für } x \in [-\pi, \pi[, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $I_0(\kappa) = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{(i!)^2} (\frac{\kappa}{2})^{2i}$ gelte.

Aufgabe 34: a) Die Abbildung $\Gamma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ heißt die *Gammafunktion*. Zeigen Sie $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \geq 1$ sowie $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, und finden Sie eine Formel für $\Gamma(\frac{n}{2})$ bei ungeradem $n \in \mathbb{N}_+$.

Beweisen Sie, daß durch die folgenden Funktionen Dichten gegeben sind, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$ definieren.

b) Für $\alpha, \nu \in \mathbb{R}_+$ ist die *Gamma-Verteilung* mit Parametern α, ν gegeben durch die Dichte

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty[\\ x & \longmapsto & \begin{cases} \Gamma(\nu)^{-1}\alpha^{\nu}x^{\nu-1}e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

c) Für $n \in \mathbb{N}_+$ ist die χ^2_n*-Verteilung* gegeben durch die Dichte

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty[\\ x & \longmapsto & \begin{cases} \Gamma(\frac{n}{2})^{-1}2^{-n/2}x^{(n-2)/2}e^{-x/2} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

d) Für $n \in \mathbb{N}_+$ ist die *t-Verteilung* (oder *Student-Verteilung*) mit n Freiheitsgraden gegeben durch die Dichte

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\Gamma(\frac{n}{2})^{-1}\Gamma(\frac{n+1}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2} \end{array}$$

Aufgabe 35: (Simulation geometrischer Wahrscheinlichkeiten)

Im folgenden sind die passenden Zufallsexperimente als Maple-Prozeduren zu implementieren und jeweils mindestens 10000mal zu wiederholen, um so gute Schätzungen für die gesuchten Erwartungswerte zu erhalten.

a) Wählt man zwei Punkte zufällig im Einheitskreis, so beträgt ihr erwarteter Abstand etwa $d_1 \approx 0,90541$.

*b)** Beweisen Sie die exakte Formel $d_1 = \frac{128}{45\pi}$.

c) Wählt man zwei Punkte zufällig im Einheitsquadrat, so beträgt ihr erwarteter Abstand etwa $d_2 \approx 0,52141$.

*d)** Beweisen Sie die exakte Formel $d_2 = \frac{1}{15}(2+\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2}))$.

e) Wählt man zwei Punkte zufällig in einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge eins, so beträgt ihr erwarteter Abstand etwa $d_3 \approx 0,36479$.

*f)** Beweisen Sie die exakte Formel $d_3 = \frac{1}{5}+\frac{3}{20}\ln 3$.

g) Wählt man zwei Punkte zufällig im Einheitswürfel, so beträgt ihr erwarteter Abstand etwa $d_4 \approx 0,5844$.

*h)** Beweisen Sie die exakte Formel $d_4 = \frac{1}{105}(4+17\sqrt{2}-6\sqrt{3}+21\ln(1+\sqrt{2})+42\ln(2+\sqrt{3})-7\pi)$.