Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

25. Juni 1998

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 8: Stetige Zufallsvariable

Aufgabe 36: (Woher der Wind weht)

Die an einer Wetterstation gemessenen Windrichtungen genügen der von-Mises-Verteilung mit Parametern $\kappa = \frac{1}{2}$ und $\varphi = 2\pi$, wobei die vorherrschende Windrichtung Westen sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stimmt ein zufällig erzeugter Wetterbericht, der "Wind aus östlichen Richtungen" (also zwischen SO und NO) vorhersagt?

Aufgabe 37: (Der Super-GAU bei der Fußball-WM)

Für ein Fernsehgerät, das bereits t Jahre alt ist, sei die Wahrscheinlichkeit, innerhalb der nächsten kurzen Zeit Δt auszufallen, annähernd gleich $r(t)\Delta t$. Die Funktion $r : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0, \infty[$ heißt dabei die *Ausfallrate.* Zeigen Sie die folgenden Behauptungen.

a) Besitzt die Verteilung der Lebensdauer des Fernsehers eine stetige Dichte f, so gilt $r(t) = f(t)/P(]t, \infty[)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ mit $P(]t, \infty[) \neq 0$.

b) Ist $r(t)$ proportional zu t^ϱ für ein $\varrho > -1$, so ist die Lebensdauer des Fernsehers Weibull-verteilt.

c) Die Lebensdauer eines t Minuten alten Fernsehgeräts sei Weibull-verteilt mit Parametern $\alpha = 1$ und $\beta = 2$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt das Gerät gerade während der 90 Minuten des Endspiels der Fußball-WM aus?

Aufgabe 38: (Die Dauer des Elfmeterschießens)

Bei einem Elfmeterschießen werden n Elfmeter ausgeführt. Bestimmen Sie die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen, die die Dauer des Elfmeterschießens beschreibt, wenn die Dauer eines einzelnen Elfmeters exponentialverteilt ist zum Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 39: Beweisen Sie, daß jede Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ höchstens an abzählbar vielen Stellen unstetig ist.

Aufgabe 40: (Die Irrfahrt des Raumschiffs Voyager)

Der Weltraum. Unendliche Weiten. Wir schreiben das 24. Jahrhundert. Dies sind die Abenteuer des Sternenschiffes U.S.S. Voyager, welches sich nach dem Zusammentreffen mit einer riesigen Strahlungswelle in einer fernen Galaxis wiederfindet, mehr als 70000 Lichtjahre von zu Hause entfernt.

a) Die Wissenschaftler an Bord der U.S.S. Voyager haben einen neuen Hyper-Warp-Antrieb entdeckt, der das gesamte Schiff innerhalb einer Folge der Sendung an einen 10000 Lj. entfernten Ort beamt. Leider gibt es noch keinerlei Möglichkeit, die Richtung der Fortbewegung zu kontrollieren. Schreiben Sie eine Maple-Prozedur `HyperWarp`(P), die zufällig einen Ort auf der Sphäre mit Radius 10000 Lj. um den Punkt $P = [x, y, z]$ auswählt und ausgibt. (Verwenden Sie die Gleichverteilung auf der Sphäre.)

b) Finden Sie durch Simulation mittels einer Maple-Prozedur `EThome`(N) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Serie nach höchstens $N = 50$ Folgen abgebrochen werden muß, weil das Raumschiff zufällig in die Nähe der Heimat gebeamt wird. (Am Anfang der Serie sei die U.S.S. Voyager am Nullpunkt. Die Umgebung des Sonnensystems bilde eine Kugel vom Radius 10000 Lj. um den Punkt $[70000, 0, 0]$.)

c) Sei D_n die Distanz der U.S.S. Voyager von ihrem Startpunkt $[0, 0, 0]$ nach n Folgen. Bestimmen Sie durch Simulation Näherungswerte für den Erwartungswert $E(D_n)$ und die Standardabweichung $\sigma(D_n)$ für einige n . Können Sie von n abhängige Formeln erraten?