Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

9. Juli 1998

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 10: Grenzwertsätze

Aufgabe 46: Eine reellwertige Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei Weibull-verteilt mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, daß die Zufallsvariable $X^\beta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ exponentialverteilt ist.

Aufgabe 47: Der Einstellungstest einer Firma besteht aus 99 Fragen, die nach aufsteigendem Schwierigkeitsgrad angeordnet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein gewisser Kandidat die i-te Frage richtig beantwortet, sei $1 - \frac{i}{100}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er eingestellt, wenn dazu die korrekte Antwort auf mindestens 60 Fragen verlangt wird?

Aufgabe 48: (Bier ist Bier und Schnaps ist Schnaps)

Ein Bartender schenkt Schnaps aus einer großen 3-Liter-Flasche aus. Ein Drink ("Stamperl") enthält durchschnittlich 5 cl Schnaps mit einer Standardabweichung von 0,5 cl. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reicht die Flasche für 65 Drinks?

Aufgabe 49: Ein Bernoulli-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in]0,1[$ werde unendlich oft wiederholt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n das Ereignis, daß zwischen dem 2^n-ten Versuch (einschließlich) und dem 2^{n+1}-ten Versuch (ausschließlich) ein Run der Länge n auftritt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten unendlich viele der Ereignisse A_n ein?

Aufgabe 50: (Die MEL-Regel)

In der Situation der modernen Portfoliotheorie (vgl. Übungsaufgabe 25) sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ die Zufallsvariable, die für $\Omega = \mathbb{N}$ den Gesamtertrag des Portfolios im n-ten Anlagezeitraum beschreibt, und $W : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gebe den Wert des Portfolios nach n Anlagezeiträumen an.

a) Zeigen Sie, daß fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln(\tfrac{W_n}{W_0}) = E(\ln(X))$$

gilt. Folgern Sie, daß ein Portfolio mit Ertrag $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ein anderes mit Ertrag $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ auf lange Sicht fast sicher übertrifft (d.h. sein Gesamtwert nach $n >> 0$ Anlageperioden ist höher), wenn $E(\ln(X)) > E(\ln(Y))$ gilt.

Die *MEL-Regel* ("Maximum Expected Log") besagt, daß unter den optimalen Portfolios aus Aufgabe 25 dasjenige zu wählen ist, für das $E(\ln(X))$ maximal ist.

b) Beweisen Sie die Näherungsformel

$$E(\ln(X)) \approx \ln E(X) - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{\mathrm{Var}(X)}{E(X)^2}$$

(Hinweis: Schreiben Sie $X = 1 + Y$ und berechnen Sie die Taylor-Entwicklung an der Stelle $E(X) = 1 + E(Y)$.)

c) Stellen Sie sich vor, Sie seien verantwortlich für die Verwaltung eines Aktienfonds, der nur in Indexzertifikate der folgenden Länder investieren darf:

1) Deutschland
2) Frankreich
3) Großbritannien
4) Japan
5) USA

Die historischen Jahreserträge (von 1950 bis 1997, in DM) dieser Wertpapiere liegen in der Datei "laender.mws" vor. Schreiben Sie eine Maple-Prozedur `MELrule`(L), die das optimale Portfolio berechnet, das die MEL-Regel erfüllt. Wie ist die Anlagesumme prozentual auf die einzelnen Indexzertifikate zu verteilen?