Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

17. Juli 1998

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 11: Schätztheorie

Aufgabe 51: Bei einer Qualitätsprüfung wurden 100 Computerchips geprüft, von denen sich vier als defekt erwiesen. Bestimmen Sie eine Maximum-Likelihood-Schätzung für die Anzahl der defekten Chips in einer Lieferung von 10000 Stück.

Aufgabe 52: (Schätzung eines Fischbestandes)

Ein Teich enthält eine unbekannte Zahl N von Fischen, die geschätzt werden soll. Dazu werden n Fische gefangen, markiert und wieder ausgesetzt. Nach einer Weile werden wieder n Fische gefangen, unter denen m markierte Fische sind.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T für N.

b) Ist T erwartungstreu? Berechnen Sie den Bias b_T.

c) Berechnen Sie die Varianz von T sowie den mittleren quadratischen Fehler R_T.

d) Geben Sie für $n \leq 5$ Konfidenzintervalle zum Niveau 0,95 an.

Aufgabe 53: Ein Gerät enthält die störanfälligen Teile A_1, A_2 und B. Es funktioniert, wenn B und mindestens eines der Teile A_1, A_2 funktioniert. Aus Untersuchungen der einzelnen Bauteile sind Konfidenzintervalle für die Wahrscheinlichkeiten p_A und p_B bekannt, daß ein Teil vom Typ A bzw. B nach einem Jahr noch funktioniert.

Leiten Sie unter der Annahme, daß Störungen in den Bauteilen unabhängig voneinander auftreten, zu einem eventuell kleineren Niveau ein möglichst kleines Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit her, daß das Gerät nach einem Jahr noch funktioniert.

Aufgabe 54: Unter der Annahme, daß Knaben- und Mädchengeburten gleich wahrscheinlich sind, sei $1 - \vartheta$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Knabe rot-grün-blind ist. Nach einem genetischen Modell ist dann $(1 - \vartheta)^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Mädchen rot-grün-blind ist. Es sind 8870 Männer und 9140 Frauen untersucht worden, und davon waren 670 Männer und 40 Frauen rot-grün-blind. Bestimmen Sie eine Maximum-Likelihood-Schätzung für ϑ.

Aufgabe 55: Je zehn Messungen der Winkel α, β, γ eines Dreiecks ergeben folgende Mittelwerte: $\overline{\alpha} = 61,3°$, $\overline{\beta} = 44,6°$, $\overline{\gamma} = 73,4°$. Die Winkelsumme ist auf Grund der Meßfehler nicht 180°. Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate Schätzungen für α, β, γ mit Winkelsumme 180°.