Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

24. Juli 1998

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 12: Testtheorie

Aufgabe 56:* Bestimmen Sie unter Verwendung der Normalapproximation den Verwerfungsbereich eines Tests zum Niveau 0,05, der bei 1000 Würfen einer Münze entscheiden soll, ob die Münze fair ist.

Aufgabe 57:* Es wird vermutet, daß bei gewissen Pferderennen auf einer kreisförmigen Rennbahn die Startposition einen Einfluß auf die Gewinnchancen hat. In 144 Rennen hatten die Sieger die Startpositionen $1, 2, \ldots, 8$ mit den folgenden Häufigkeiten: 29,19,18,25,17,10,15,11. Testen Sie die Hypothese, daß alle Startpositionen die gleiche Siegwahrscheinlichkeit besitzen, zum Signifikanzniveau 0,05.

Aufgabe 58:* In einer fernen Galaxie bricht zu einem unbekannten Zeitpunkt ϑ eine Supernova aus und sendet einen Lichtblitz der Dauer t. Es sei bekannt, daß die Dauer solcher Lichtblitze exponentialverteilt ist zu einem bereits gemessenen Parameter λ. Nur das Ende des Lichtblitzes konnte zeitlich bestimmt werden. Beschreiben Sie einen schärfsten Test zum Niveau $\alpha = 0,05$ für die Hypothese $\vartheta \leq 3$ gegen die Alternative $\vartheta > 3$.

Aufgabe 59:* Bei Rouletterädern tritt manchmal ein gewisser Defekt auf, so daß eine bestimmte Zahlenkombination nicht mit Wahrscheinlichkeit p, sondern mit Wahrscheinlichkeit $q \neq p$ ausgespielt wird. Zeigen Sie, daß es für $n >> 0$ stets einen Test gibt, der aus n unabhängigen Wiederholungen des Spiels besteht, und der mit einem Niveau $\leq 0,05$ sowie einer Macht $\geq 0,95$ prüft, ob ein gegebenes Rouletterad in Ordnung ist.

Aufgabe 60:* (Darwins Versuch)
Charles Darwin hatte 15 Paare von Maissamen in 15 Töpfe gepflanzt. Der eine Samen war jeweils durch Kreuzung, der andere durch Selbstbefruchtung entstanden. Für $i = 1, \ldots, 15$ verglich er nach einiger Zeit die Höhe x_i der gekreuzten Pflanze mit der Höhe y_i der selbstbefruchteten Pflanze und erhielt die folgenden Unterschiede $z_i = x_i - y_i$ (in $\frac{1}{8}$-inch):

$$6, 8, 14, 16, 23, 24, 28, 29, 41, -48, 49, 56, 60, -67, 75$$

Es soll die Hypothese “Es gibt keinen Unterschied zwischen den beiden Samenarten” gegen die Alternative “Gekreuzte Samen entwickeln stärkere Pflanzen” getestet werden.

a) Ist $n \in \mathbb{N}_+$ und $D = \{d_1, \ldots, d_n\} \in \mathbb{Z}$, so sei $q(t, D)$ für $t \in \mathbb{Z}$ die Anzahl aller Teilmengen von D, deren Summe höchstens t ist. Finden Sie eine rekursive Beschreibung der Zahlen $q(t, D)$.

b) Schreiben Sie eine Maple-Prozedur, die die Funktion $q(t, D)$ berechnet.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter der Hypothese die Summe der negativen Höhendiffenrenzen höchstens 115 ist.

d) Formulieren Sie ganz allgemein eine Testmethode, die die obige Vorgehensweise mathematisch beschreibt.