Tutorium 10: Durch Matrizen dargestellte Monoidordnungen

Seien $(v_1, ..., v_n)$, $v_1', ..., v_n')$ zwei n-Tupel linear unabhngiger Vektoren in $\mathbb{Q}^n$ und seien V, V' die zugehörigen Matrizen.

a) Sei $U \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ eine untere Dreiecksmatrix, mit positiven Einträgen in der Diagonalen und $V' = UV$. Dann ist $\mathrm{ord}(V) = \mathrm{ord}(V')$.

Beweis:
Es gilt $t_1 \geq_{\mathrm{ord}(V)} t_2$ genau dann, wenn die erste von Null verschiedene Komponente von $(\langle \log(t_1) - \log(t_2), v_1\rangle, ..., \langle \log(t_1) - \log(t_2), v_n\rangle)$ positiv ist, oder $t_1 = t_2$.

$$V' = \begin{pmatrix} v'_{11} & \cdots & v'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v'_{n1} & \cdots & v'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} = UV$$

$\Rightarrow v'_{kl} = \sum\limits_{i=1}^{k} u_{ki} v_{il}$

$\Rightarrow v'_k = \sum\limits_{i=1}^{k} u_{ki} v_i$

Sei $x_i := \langle \log(t_1) - \log(t_2), v_i\rangle$

Nun folgt: $(\langle \log(t_1) - \log(t_2), v_1'\rangle, ..., \langle \log(t_1) - \log(t_2), v_n'\rangle) = (u_{11} \cdot x_1, ..., \sum\limits_{i=1}^{n} u_{ni} x_i)$

Sei x_j die erste Komponente von $(x_1, ..x_n)$ mit $x_j \neq 0$

$\Rightarrow (u_{11} \cdot x_1, ..., \sum\limits_{i=1}^{n} u_{ni} x_i) = (0, ..., 0, u_{jj} \cdot x_j, ..., \sum\limits_{i=j}^{n} u_{ni} x_i)$

Da $u_{jj} > 0$, haben $u_{jj} \cdot x_j$ und x_j gleiches Vorzeichen, also $\mathrm{ord}(V) = \mathrm{ord}(V')$. $\square$

b) Behauptung: $\mathrm{ord}(V)$ kann durch eine Matrix aus $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ dargestellt werden.

Beweis:

Sei $V = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$ mit $v_{ij} \in \mathbb{Q}$

Sei u_{jj} der Hauptnenner von $\{v_{j1}, ..., v_{jn}\}$ für $j = 1..n$ und $u_{ij} := 0$ für $i \neq j$ und $U := [u_{ij}]_{i,j=1..n}$
Dann ist U eine untere Dreiecksmatrix und $UV \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ und nach a) $\mathrm{ord}(UV) = \mathrm{ord}(V)$ $\square$

c) Ist σ eine Termordnung, gibt es ein $V \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{N})$ mit $\sigma = \mathrm{ord}(V)$

Beweis:

Sei $\sigma = \mathrm{ord}(V_1)$, mit $V_1 = \begin{pmatrix} v^1_{11} & \cdots & v^1_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v^1_{n1} & \cdots & v^1_{nn} \end{pmatrix}$

Nach b) gilt o.E. $v^1_{ij} \in \mathbb{Z}$

Da σ eine Termordnung, sind $v_{11}^1, ..., v_{1n}^1 \geq 0$
Sei $M_k := \max\{|v_{ki}^{k-1}| | i = 1..n\} + 1$

$$V_k := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & M_k & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot V_{k-1} = \begin{pmatrix} v_{11}^{k-1} & \cdots & v_{1n}^{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ M_k v_{k-1,1}^{k-1} + v_{k1}^{k-1} & \cdots & M_k v_{k-1,n}^{k-1} + v_{kn}^{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1}^{k-1} & \cdots & v_{nn}^{k-1} \end{pmatrix}$$

1.Fall: $v_{k-1,i}^{k-1} > 0 \Rightarrow v_{k,i}^k = M_k \cdot v_{k-1,i}^{k-1} + v_{k,i}^{k-1} > 0$
2.Fall: $v_{k-1,i}^{k-1} = 0 \Rightarrow v_{k,i}^k = v_{k,i}^{k-1} > 0$ oder $v_{k,i}^k = v_{k,i}^{k-1} = 0$ (Termordnung!)
V_k definiert eine Termordnung und nach a) gilt: $\mathrm{ord}(V_k) = \mathrm{ord}(V_{k-1})$
Nun bestehen die ersten k Zeilen von V_k aus positiven Einträgen.
V_n ist dann eine gesuchte Matrix. $\square$

d) Gesucht ist eine Darstellung wie in c) für DegRevLex

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

e) Wenn $\mathrm{ord}(V) = \mathrm{ord}(V')$, existiert ein $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$ mit $v_1' = \lambda v_1$

Beweis:
Angenommen v_1, v_1' sind linear unabhängig.
$\Rightarrow \exists v \in \langle v_1, v_1' \rangle \neq 0$ d.d. $\langle v, v_1 + v_1' \rangle = 0$, o.E. $v \in \mathbb{Z}^n$
$\Rightarrow \langle v, v_1 \rangle = -\langle v, v_1' \rangle$
Seien t_1, t_2 Terme, mit $\log(t_1) - \log(t_2) = v$, dann ist $t_1 <_{\mathrm{ord}(V)} t_2$ und $t_1 >_{\mathrm{ord}(V')} t_2$ oder umgekehrt.
$\Rightarrow \mathrm{ord}(V) \neq \mathrm{ord}(V')$ Widerspruch.
Es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{Q}$ mit $v_1 = \lambda v_1'$
Andererseits ist klar, daß $\lambda > 0$ sein muß, da sonst ein x_i existiert,
mit $x_i <_{\mathrm{ord}(V)} 0$ und $x_i >_{\mathrm{ord}(V')} 0$ $\square$