Seminarvortrag V

Computeralgebra in der 2-stufigen ganzzahligen stochastischen Programmierung

1 2-stufige stochastische Programmierung: Einführung

Wir haben in unserem Leben tagtäglich viele Entscheidungen zu treffen. Die meisten davon sind nicht so bedeutend. Einige davon jedoch schon, wie zum Beispiel Investitionsentscheidungen. Diese sind in der Regel ziemlich komplex und je nach Art der Investition mit mehr oder weniger Risiko verbunden, weil die einzigen Parameter, die den Ivestitionserfolg wesentlich bestimmen, zum Zeitpunkt der ersten Investition noch gar nicht feststehen. Zum Beispiel: Senkt die Bundesbank die Leitzinsen, Entwicklung des Aktienmarktes, usw. In meinem Seminarvortrag will ich am Beispiel eines Immobilien-Investitionsproblem aufzeigen, inwiefern man die Theorie der Gröbner-Basen dafür verwenden kann, solche Optimierungsaufgaben mit dem Computer zu lösen.

2 Ein Investitionsproblem

Eine Investorengruppe plant in drei Stadtvierteln 1,2,3 Eigentumswohnungen zu kaufen. Insgesamt sollen S DM so investiert werden, dass sich nach 5 Jahren eine optimale Rendite ergibt. Die Stadt plant jedoch auch 3 große Bauvorhaben. Es sollen ein großer Naherholungspark, ein Theater und eine große Müllverbrennungsanlage gebaut werden. Als mögliche Standorte sind unter anderem auch die Viertel 1,2,3 bzw. deren direkte Nachbarschaft im Gespräch. Dies würde jedoch die Mieteinnahmen entscheidend beeinflussen. Deshalb soll nur ein Teil des Geldes sofort zum Ankauf der Immobilien benutzt werden, der Rest und der bis dahin erzielte Gewinn erst nach 2 Jahren, wenn die Standorte der drei Bauvorhaben klar sind. Genaue Bedingungen: Die Stückpreise der einzelnen Appartements in Viertel 1,2,3 bezeichne ich mit s_1, s_2 bzw s_3 DM.
Vertraglich soll festgesetzt sein, dass sie keinerlei Schwankungen unterworfen sein sollen. Es sollen jeweils a_i Appartements im Viertel i angeboten werden.
Der geschätzte jährliche Mietgewinn pro Appartement im Viertel i soll g_i DM betragen.
Dieser kann jedoch gewissen Schwankungen in den ersten 2 Jahren unterworfen sein, soll aber ab dem 3. Jahr, wenn die Standorte der drei Bauvorhaben klar sind, konstant über oder unter dem jeweiligen g_i bleiben.
Die Summe, die nicht sofort investiert wird, soll auf der Bank zu $p \cdot 100\%$ Zinsen angelegt werden, wobei die Zinsen jährlich ausbezahlt werden sollen, also keine Zinseszinsen anfallen.

3 Das mathematische Modell

Definition 3.1 Seien $c \in \mathbb{Z}^n$ Zeilenvektor, $A \in M(q \times n, \mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^q$ Spaltenvektor, $C := \{x \in \mathbb{N}^n : Ax \geq b\}$, ($\geq$ im Sinne von komponentenweise $\geq$), $T \in M(p \times n, \mathbb{Z})$, $\tilde{q} \in \mathbb{Z}^m$ Zeilenvektor, $W \in M(p \times m, \mathbb{Z})$, ξ Zufallsvariable mit Bild in $\mathbb{Z}^p$ und bekannter Verteilung.
$E_\xi f$ bezeichne den Erwartungswert einer Funktion f in der Variablen ξ.
Die auf C definierte Funktion $B(x) = cx + Q(x)$, wobei $Q(x) = E_\xi v(Tx - \xi)$ und $v(s) = \min\{\tilde{q}y : Wy \geq s, y \in \mathbb{N}^n\}$ nennen wir *Bewertungsfunktion* (mit den Parametern c, A, b usw.).
Der Wert $\min\{cx + Q(x) : x \in C\}$ heiße *zweistufiges ganzzahliges stochastisches Programm*. (Zur Existenz dieses Minimums später mehr).
Niedrige Werte von $B(x)$ sollen also als günstig betrachtet werden.
Das Ungleichungssystem $Ax \geq b$ nennen wir die *Nebenbedingungen der ersten Stufe*, $Wy \geq b$ *Nebenbedingungen der 2. Stufe*.
Die Elemente $x \in C$ heißen *mögliche Entscheidungen der ersten Stufe*. Der Term $Q(x)$ heißt *Korrekturterm*.

Anwendung auf unser Problem:
Bezeichnungen:
Entscheidungen der 1. Stufe:
x_1, x_2, x_3: Anzahl der (sofort) gekauften Appartements im Viertel 1,2 bzw. 3; x_b: auf der Bank angelegtes Geld
m_1, m_2, m_3: die jeweils tatsächlichen zusätzlichen durchschnittlichen jährlichen Mietgewinne pro Jahr (1.-2. Jahr)
$\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$: jeweils jährlichen Mietgewinne ab 3. Jahr
Entscheidungen der 2. Stufe:
y_1, y_2, y_3: Anzahl Investitionen in jew. Viertel, y_b abgehobenes Geld
Die Entscheidungen der 1. Stufe sind offensichtlich folgenden Nebenbedingungen unterworfen:
$x_1 \leq a_1,\ x_2 \leq a_2,\ x_3 \leq a_3,\ s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + x_b = S$
In Matrizenschreibweise:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & -1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ -S \\ S \end{pmatrix}, \quad Ax \geq b$$

Setze $C := \{x \in \mathbb{N}^4 : Ax \geq b\}$.
Konstruktion unserer Bewertungsfunktion:
Unser erwarteter Gewinn bei einer Investition (x_1, x_2, x_3, x_b), wenn nach 2 Jahren nichts hinzu gekauft wird, beträgt nach 5 Jahren:

$$5(x_1g_1 + x_2g_2 + x_3g_3 + x_bp)$$

Diesen Gewinn können wir aber noch durch neue Investitionen beeinflussen. Zusätzlich kann er aufgrund der Unsicherheit der g_i noch nach oben oder unten von obigem Wert abweichen.
Um diese Faktoren zu berücksichtigen füge ich noch den Term $Q'(x)$ hinzu und erhalte

$$G(x) := 5(x_1g_1 + x_2g_2 + x_3g_3 + x_bp) + Q'(x)$$

Da niedrigere Werte der Bewertungsfunktion definitionsgemäß günstig sind, ist es sinnvoll

$$B(x) := -G(x), \ \ Q(x) := -Q'(x)$$

zu definieren.
Weiterhin ergibt sich:

$$\tilde{q}y = 5(x_1g_1+x_2g_2+x_3g_3+x_bp)-2(x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3+x_bp)-3((x_1+y_1)\tilde{m}_1+\ldots+(x_3+y_3)\tilde{m}_3+(x_b-y_b)p)$$

und

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_b \\ y_{hilf} \end{pmatrix}$$

mit zusätzlicher Nebenbedingung $y_{hilf} = 1$
Die Nebenbedingungen 2. Stufe lauten jetzt:

$$y_{hilf} = 1,\ y_1 \leq a_1 - x_1,\ y_2 \leq a_2 - x_2,\ y_3 \leq a_3 - x_3,\ y_1s_1 + y_2s_2 + y_3s_3 + (x_b - y_b) = K$$

wobei

$$K = S - (x_1s_1 + x_2s_2 + x_3s_3) + 2(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + x_bp)$$

das zur Verfügung stehende Kapital bezeichne.
Diese Nebenbedingungen schreiben sich mit

$$W := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & -1 & 0 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \\ K - x_b \\ x_b - K \end{pmatrix}$$

in der Form $Wy \geq s$.
Wichtig für die spätere Berechnung hierbei ist, dass die Matrix W von Anfang an bekannt ist. ($\Rightarrow$ Man muss später die Gröbner-Basis nur einmal berechnen)
Durch ähnliche Überlegungen ergibt sich nun ξ und T. Unser gesamtes Problem reduziert sich deshalb im wesentlichen auf zwei Dinge:
a) Das Lösen von Ungleichungssystem in $\mathbb{Z}$
b) Ein geschicktes Auswählen von „Kandidatenpunkten“ $x(x_1, x_2, x_3, x_b)$ und den Zufallswerten $(m_1, \ldots, m_3, \tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_3)$.
Zu 1.:

Satz 3.2 *(Buchberger Algorithmus zum Lösen von ganzzahligen linearen Programmen)*
Sei $A \in M(d \times n, \mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^d$ Sp. Vektor, $c \in \mathbb{Z}^p$ Zeilenvektor. Folgende Anweisungen sind ein Algorithmus, der $\min\{cy : Ay = b, y \in \mathbb{N}^n\}$ liefert, falls existent.

a) Sei k ein beliebiger Körper und $k[x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_n]$ Polynomring, auch geschrieben als $k[x, y]$.

b) Sei $\leq$ eine Monoidordnung in $k[x, y]$, die kompatibel ist mit c und $x > y$ erfüllt.

c) Sei $I := \langle x_1^{a_{1i}} - y_1, \ldots, x^{a^n} - y_n \rangle$, wobei a^i die i-te Spalte von A, und x^{a^i} das $x_1^{a_{1i}} \cdot \ldots \cdot x_d^{a_{di}}$.

d) Berechnen sie die (reduzierte) Gröbner-Basis G von I bzgl. $\leq$, mit Hilfe des Buchberger Algorithmus.

e) Dividieren Sie x^b durch G und sie erhalten den Rest $r_G(x^b)$.

f) Ist $r_G(x^b) \in k[y]$ dann ist der Rest ein Monom, dessen Exponentenvektor eine Lösung für obiges Problem liefert, andererseits gibt es keine.

Bemerkung 3.3 Dieser Algorithmus ist auch dazu geeignet, ganzzahlige lineare Programme zu lösen, bei denen statt der Gleichung $Ax = b$ die Ungleichung $Ax \geq b$ steht, weil jede Ungleichung $a \geq b$ äquivalent als $a + h = b$ und $h \geq 0$ mit einer Hilfvariable h geschrieben werden kann und obiger Algorithmus ohnehin nur die Lösungen berechnet, deren Komponenten nicht negativ sind, d.h. $h \geq 0$ ist keine zusätzliche Nebenbedingung.

Bemerkung 3.4 Die Berechnung der $\leq$-Gröbnerbasis hängt nur von der linken Seite ab, d.h. für die gesamt Optimierungsaufgabe muss die Gröbner-Basis nur einmal berechnet werden.

Zu 2.:

Bemerkung 3.5 Es ist in der Regel möglich anzunehmen, dass die Wertemenge von ξ endlich ist, ohne dass das Programm dadurch wesentlich verfälscht wird.

Annahme: $m_1, m_2, m_3, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ können eine gewisse Obergrenze nicht übersteigen.
$\rightarrow$ endlich viele m_i und $\tilde{m}_i$ $\rightarrow$ endliches Bild von ξ.

Bemerkung 3.6 Aus $Wy \geq t$ folgt $Wy \geq \min\{t' \in \mathbb{Z} \mid t \leq t'\}$, deshalb ist unsere Funktion v auf den Mengen $\{s \in \mathbb{R}^p : \min\{s' \in \mathbb{Z} \mid s \leq s'\} = k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ konstant. Weil aber nach Bemerkung 3.3 ξ nur endlich viele Werte annehmen kann, ist die Funktion Q konstant auf gewissen (endlichen) Durchschnitten solcher Teilmengen. Insbesondere zerfällt die Menge $\{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \geq b\}$ in Teilmengen auf denen die Funktion Q konstant ist.

Man kann zeigen:

Satz 3.7 *Jede dieser Teilmengen besitzt mindestens einen „Eckpunkt“. Die Menge V dieser Eckpunkte bezeichne ich als Kandidatenpunkte.*

Mit Hilfe dieses Satzes und dieser Bemerkungen kann man 2. zeigen. Eine genauere Erläuterung würde aber den Rahmen dieses Seminarvortrags sprengen.