Tutorium 22

22.b;

Vor.: *Sei* $I := (f_1, \ldots, f_m)$ *das von* $f_i := a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$ $1 \leq i \leq m$ *erzeugte Ideal und* $A := (a_{ij})$ *die zugehörige Matrix. Sei weiterhin* $B := (b_{ij})$ *die durch Zeilenumformungen aus* A *entstandene Matrix in Zeilenstufenform und* $g_i := b_{i1} + \ldots + b_{in}$ *die zugehörigen Polynome.*
Dann ist $G := \{g_i | 1 \leq i \leq m, g_i \neq 0\}$ *Lex Gröbner-Basis von* I

Bew.: Die Matrix B geht durch elementare Zeilenumformungen aus der Matrix A hervor, das heißt für jedes $1 \leq i \leq m$ entsteht g_i durch Linearkombinationen der f_j. Also gilt nach Streichung der in B enthaltenen Nullzeilen:

$$\text{Ideal } (f_1, \ldots, f_m) = \text{Ideal } (g_1, \ldots, g_k) \text{ wobei } k \leq m$$

Zusätzlich sind die Elemente von G so konstruiert, daß $ggT(LT(g_i), LT(g_j)) = 1$ für $i \neq j$ (bezüglich Lex). Damit wissen wir nach Lemma 2.5.2.a der Vorlesung daß die zugehörigen σ_{ij} eine Liftung in $ker(\lambda)$ für alle $1 \leq i, j \leq k$ haben und damit ist G Lex Gröbner-Basis von I nach Theorem 2.4.1 .

□

22.c;

Vor.: *Sei* $I := (f_1, \ldots, f_m)$ *ein Ideal in* P *mit den erzeugenden* $f_i := a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + a_{in+1}$ $(deg(f_i) \leq 1)$ *und Lex die Termordnung.*

Algorithmus:
1, Definiere $A := (a_{ij})$ als die durch die Koeffizienten von f_i erzeugte $(m \times n + 1)$ Matrix.
2, Überführe A durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform und erhalte so die Matrix $B := (b_{ij})$. bilde damit die Polynome $g_i := b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n + b_{in+1}$ mit $g_i \neq 0$
3, Überprüfe ob eines dieser Polynome konstant ist.
Wenn ja ist dieses konstante Polynom die Lex Gröbner-Basis von I.
4,Andernfalls ist $\{g_i | 1 \leq i \leq k\}$ die Lex Gröbner-Basis von I .

Dieser Algorithmus stoppt nach endlich vielen Schritten und liefert die Lex Gröbner-Basis von I *.*

Bew.: Der Algoritmus stoppt nach endlich vielen Schritten, da sich A mit endlich vielen Schritten in B überführen läßt.
Falls keines der Polynome nur aus einer Konstanten besteht, erhalten wir wieder $ggT(g_i, g_j) = 1$ für $i \neq j$ und damit die Behauptung nach 22.b .
Falls ein g_j konstant ist, dann ist das Ideal I identisch mit dem Ring P und damit ist $\{g_j\}$ Lex Gröbner-Basis von I.

□