Mathematik für Naturwissenschaftler 1

Nachklausur

Aufgabe 1: An einem Genort befinden sich ein Allel A_1 mit 60% Häufigkeit und ein Allel A_2 mit 40% Häufigkeit. Pro Generation mutieren 40% von Gen A_1 in Gen A_2 und 60% von Gen A_2 in Gen A_1. Wie entwickeln sich die Häufigkeiten van A_1 und A_2 nach vielen Generationen?

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \cdots$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \cdots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$

Aufgabe 3: An welchem Punkt der Kurve $y = x\sqrt{x}$ ist die Tangente parallel zur Geraden $3x - y + 6 = 0$?

Aufgabe 4: In einen Halbkreis vom Radius 1m soll ein Rechteck mit möglichst großer Fläche einbeschrieben werden. (Dies bedeutet, dass die Ecken des Rechtecks auf dem Rand des Halbkreises liegen.) Finden Sie die Kantenlängen dieses Rechtecks.

Aufgabe 5: Zwei Autos starten gleichzeitig vom selben Punkt. Eines fährt mit 60 km/h nach Süden und das andere mit 25 km/h nach Westen. Wie schnell vergrößert sich ihre Distanz zwei Stunden später?

Aufgabe 6: Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^{\pi} \sin^2(x)\, dx$

b) $\int_0^{1} x\sqrt{x^2+1}\, dx$

c) $\int_0^{1} \frac{x^3}{x^2+1}\, dx$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 0 \\ -x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -7x_4 & = 0 \end{array}$$

Aufgabe 8: Gegeben seien die beiden Geraden $G_1 = \{(t, 2t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \{(0, t, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^3$.

a) Finden Sie die beiden Punkte $P_1 \in G_1$ und $P_2 \in G_2$, die den kleinsten Abstand voneinander haben.

b) Berechnen Sie den Abstand von P_1 und P_2.

Aufgabe 9: Beim Schafkopf hat jeder der vier Spieler sechs Karten. Einer der Spieler besitze genau zwei Ober. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden anderen Ober *zusammenstehen*, d.h. dass ein anderer Spieler die restlichen beiden Ober besitzt?