Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth

WS 2000/2001

Übungen zur Vorlesung

Praktische Anwendungen der Computeralgebra

Blatt 2

Abgabetermin: Mi, 6.12.2000

Aufgabe 6: Sei $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynomring über einem Körper K und seien $f_1, f_1 \in P \backslash \{0\}$. Der Syzygienmodul $\mathrm{Syz}(f_1, f_2)$ werde von einem Vektor (g_1, g_2) erzeugt. Zeigen Sie $g_1 \mid f_2$ und $\mathrm{ggT}(f_1, f_2) = f_2/g_1$.

Aufgabe 7: Sei K eine Körper, sei $P = K[x_1, \ldots, x_n]$, sei $f \in P$, seien $g_1, \ldots, g_s \in P \setminus \{0\}$, und sei $I = (fg_1, \ldots, fg_s)$.

a) Beweisen Sie $I : (f) = (g_1, \ldots, g_s)$.
b) Für $i = 1, \ldots, s$ sei $g_i' = g_i / \mathrm{ggT}(g_1, \ldots, g_s)$. Zeigen Sie

$$(g_1, \ldots, g_s) : (\mathrm{ggT}(g_1, \ldots, g_s)) = (g_1', \ldots, g_s')$$

Aufgabe 8: Sei $P = K[x, y_1, \ldots, y_n]$ ein Polynomring über einem Körper K, sei $I \subseteq P$ ein Ideal mit $I \cap K[x] \neq (0)$, sei σ eine Eliminationsordnung für $y_1, \ldots, y_n$, und sei G die reduzierte σ-Gröbner-Basis von I.

a) Zeigen Sie, daß $G \cap K[x]$ aus genau einem Polynom f besteht.
b) Ist I ein Primideal (d.h. aus $gh \in I$ folgt $g \in I$ oder $h \in I$), so ist f irreduzibel (d.h. jeder Faktor von f ist konstant).

Aufgabe 9: Seien $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ und sei $I = (f_1, \ldots, f_s)$.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `IsFinite`(I), die prüft, ob das algebraische Gleichungssystem $f_1 = \cdots = f_s = 0$ nur endlich viele Lösungen in $\mathbb{C}^n$ hat und den entsprechenden Boolschen Wert ausgibt.
b) Implementieren Sie eine CoCoA-Funktion `SolveEq`(I), die mit Hilfe der Sätze 10.3 und 10.4 das algebraische Gleichungssystem löst. Nehmen Sie dazu an, daß es nur endlich viele Lösungen gibt und daß deren letzte Koordinaten paarweise verschieden sind.
c) Lösen Sie mit der Funktion `SolveEq`$(\ldots)$ folgendes algebraische Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y + z - 1 &= 0 \\ 3x + y^2 + z - 1 &= 0 \\ 4x^2 + 4xz + x + y + z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 10: Implementieren Sie den Buchberger-Möller-Algorithmus in einer CoCoA-Funktion `BuMo`(...), die als Eingabe die Matrix (p_{ij}) der Punktkoordinaten erwartet und die das Paar $[G, Q]$ wie in Satz 11.9 berechnet.

Wenden Sie diese Funktion in einigen selbstgewählten Fällen an und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der eingebauten Funktion `IdealOfPoints`(...).