Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth

WS 2000/2001

Übungen zur Vorlesung

Praktische Anwendungen der Computeralgebra

Blatt 3

Abgabetermin: Mi, 20.12.2000

Aufgabe 11: Gegeben seien das vollständige Design $\mathbb{D} = \{(i,j) \mid i,j \in \{-1,0,1\}\}$ in $\mathbb{Q}^2$ und die Teilmenge $\mathbb{F} = \{(0,0), (0,-1), (1,0), (1,1), (-1,1)\} \subseteq \mathbb{D}$.

a) Zeigen Sie, daß die Restklassen der Terme aus $\mathcal{O} = \{1, x, y, x^2, y^2\}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}[x,y]/I_{\mathbb{F}}$ bilden.
Hinweis: Die Auswertungsmatrix von $\mathcal{O}$ in $\mathbb{F}$ ist invertierbar.

b) Beweisen Sie, daß die Menge $\mathcal{O}$ nicht von der Form $\mathbb{T}^2 \setminus \mathrm{LT}_\sigma(I_{\mathbb{F}})$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $f = x^2 + xy - x - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y$.

Aufgabe 12: Sei K ein Körper, sei $P = K[x_1, \ldots, x_n]$, und seien $f_1, \ldots, f_s \in P$. Zeigen Sie, daß für jedes Ideal $I \subseteq P$ gilt

$$I : (f_1 \cdots f_s)^\infty = (\cdots((I : (f_1)^\infty) : (f_2)^\infty)\cdots) : (f_s)^\infty$$

Aufgabe 13: Sei K ein Körper, $P = K[x_1, \ldots, x_n]$, und seien $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \in P$. Ferner sei $J \subseteq P$ ein Ideal, das das Polynom $f_1 \cdots f_s - g_1 \cdots g_t$ enthalte. Beweisen Sie die Formel

$$J : (f_1 \cdots f_s \cdot g_1 \cdots g_t)^\infty = J : (f_1 \cdots f_s)^\infty$$

Aufgabe 14: Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `DioSysSolve(...)`, die als Eingabe eine Matrix $\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{N})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{N}^n$ erwartet. Die Funktion soll zuerst prüfen, ob das Diophantische Gleichungssystem $\mathcal{S}: \mathcal{A} \cdot (z_1, \ldots, z_n)^{\mathrm{transp.}} = b$ lösbar ist und in diesem Fall dann eine Lösung von $\mathcal{S}$ berechnen.

Wenden Sie Ihre Funktion `DioSysSolve(...)` in folgenden Fällen an:

a) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 21 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 7 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 9 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 27 \\ 38 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15: In der Situation von Aufgabe 14 sei K ein Körper, sei $P = K[x_1, \ldots, x_n]$, sei $Q = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, und sei $J \subseteq Q$ das von $\{x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n\}$ mit $t_i = y_1^{a_{1i}} \cdots y_m^{a_{mi}}$ erzeugte Ideal.

a) Berechnen Sie das Eliminationsideal $I = J \cap P$ in den folgenden Fällen mit Hilfe des eingebauten Befehls `Elim`(...).

1) $\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & 2 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 7 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 9 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 5 & 8 & 7 & 3 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 2 & 4 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 6 & 6 & 5 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 9 & 6 & 9 & 7 & 1 & 9 & 2 & 9 \\ 9 & 7 & 0 & 6 & 3 & 9 & 2 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Verwenden Sie die in CoCoA eingebaute Funktion `LinKer`(...) sowie die Beschreibung von I als $I = I_{\mathcal{L}} : (x_1 \cdots x_n)^\infty$, um eine CoCoA-Funktion `Toric`(...) zu schreiben, die das Ideal I effizient berechnet. Wenden Sie Ihre Funktion in den Fällen von a) an und vergleichen Sie die Timings.
Hinweis: Die Funktion `LinKer`(...) ist nicht deterministisch. Wenden Sie sie mindestens achtmal an, um verschiedene $\mathbb{Z}$-Basen von $\mathcal{L}$ zu erzeugen.

c) Optimieren Sie ihre Funktion `Toric`(...), indem Sie die Resultate der Aufgaben 12 und 13 anwenden. Vergleichen Sie die Timings der neuen Funktion `ToricOpt`(...) wieder in den Fällen von a).