Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth

WS 2000/2001

Übungen zur Vorlesung

Praktische Anwendungen der Computeralgebra

Blatt 4

Abgabetermin: Mi, 24.1.2001

Aufgabe 16: Sei $P = K[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynomring über einem Körper K und seien $f_1, \dots, f_s \in P$.

a) Beweisen Sie, dass genau dann $\mathrm{Syz}_P(f_1, \dots, f_s) = 0$ gilt, wenn $s = 1$ und $f_1 \neq 0$ ist.

b) Finden Sie im Fall $f_1 = 1$ ein explizites Erzeugendensystem des Syzygienmoduls $\mathrm{Syz}_P(f_1, \dots, f_s)$.

Aufgabe 17: Seien $I = (f_1, \dots, f_s)$ und $J = (g_1, \dots, g_t)$ zwei Ideale im Polynomring $P = K[x_1, \dots, x_n]$ über einem Körper K. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

a) $I \subseteq J$

b) Es gibt eine Matrix $\mathcal{A} = \binom{\mathcal{B}}{\mathcal{I}_t}$ über P, wobei $\mathcal{B}$ die Größe $s \times t$ hat und $\mathcal{I}_t$ die $t \times t$ Einheitsmatrix ist, so dass die Spalten von $\mathcal{A}$ den P-Modul $\mathrm{Syz}_P(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t)$ erzeugen.

Aufgabe 18: (Lagrange-Interpolation)
Seien $k \in \mathbb{N}$ und $(c_0, d_0), \dots, (c_k, d_k) \in \mathbb{Q}^2$. Für $i = 0, \dots, k$ sei $\ell_i = \prod\limits_{j \neq i} \frac{x - c_j}{c_i - c_j} \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Beweisen Sie, dass das **Lagrange-Interpolationspolynom** $\ell = \sum_{i=0}^k d_i \ell_i$ einen Grad $\deg(\ell) \leq k$ hat und durch die Punkte $(c_0, d_0), \dots, (c_k, d_k)$ geht.

b) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `Lagrange(...)`, die als Eingabe die Liste $[[c_0, d_0], \dots, [c_k, d_k]]$ erwartet und die das Lagrange-Interpolationspolynom berechnet.

c) Wenden Sie Ihre Funktion `Lagrange(...)` in den folgenden Fällen an.
   1) Interpolation von $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(t \mapsto \sin(t))$ mit Stützpunkten bei $c_i = \frac{i\pi}{2}$ für $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
   2) Interpolation von $g : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(t \mapsto \frac{1}{1+25t^2})$ mit denselben Stützpunkten.
   3) Interpolation von f mit Stützpunkten bei $\tilde{c}_i = \frac{i\pi}{4}$ für $i = 0, 1, \dots, 8$.
   4) Interpolation von g mit den Stützpunkten $\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_8$.

   Wie hat sich die Vergrößerung der Zahl der Stützpunkte jeweils auf die Qualität der Interpolation ausgewirkt?

Hinweis: Schreiben Sie zuerst eine CoCoA-Funktion `Sin(...)`, die mit Hilfe der Taylor-Entwicklung den Wert von $f(t)$ bis auf eine gegebene Nachkommastellenzahl genau berechnet. Implementieren Sie dann eine Funktion `Values(...)`, die aus $[c_0, \dots, c_k]$ die Liste $[[c_0, d_0], \dots, [c_k, d_k]]$ berechnet. Der Name der zu interpolierenden Funktion soll dabei eines der Argumente von `Values(...)` sein.

Aufgabe 19: (Berechnung von Spline-Moduln)
Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$, und sei $\mathcal{C} = (c_0, \ldots, c_k) \in \mathbb{Q}^{k+1}$ mit $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_k = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `Splines(...)`, die bei angegebenem r ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}[x]$-Moduls $\mathbb{S}^r(\mathcal{C})$ der r-mal stetig differenzierbaren $\mathcal{C}$-Splines berechnet.

Aufgabe 20: (Berechnung natürlicher Splines)
Gegeben seien a, b und $\mathcal{C}$ wie in Aufgabe 19.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `NatSpline(...)`, die aus einer Liste von Stützpunkten $[[c_0, d_0], \ldots, [c_k, d_k]]$ den zugehörigen natürlichen $\mathcal{C}$-Spline berechnet.
b) Wenden Sie Ihre Funktion `NatSpline(...)` an, um die Funktion $h : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = \sin(e^t)$ an den Punkten $c_i = \frac{i}{4}$ mit $i = 0, 1, \ldots, 12$ zu interpolieren.

Hinweis: Um die Funktion $h(t)$ genügend genau zu berechnen, sollten Sie $\sin(t)$ und e^t weit genug (z.B. die ersten 70 Terme) in eine Taylorreihe entwickeln.

c) Wiederholen Sie Teil c) mit der Zerlegung $\mathcal{C}' = (0,\ 0.45,\ 1.15,\ 1.55,\ 1.85,\ 2.05,\ 2.25,\ 2.4,\ 2.55,\ 2.65,\ 2.75,\ 2.85,\ 3)$. Welche der beiden Spline-Funktionen approximiert die Funktion h besser?