Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth

WS 2000/2001

Übungen zur Vorlesung

Praktische Anwendungen der Computeralgebra

Blatt 5

Abgabetermin: Mi, 7.2.2001

Aufgabe 21: Sei $\Omega = \{t_1, \dots, t_n\}$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, seien Zufallsvariable $X_1, \dots, X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{Q}$ gegeben, und seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$. Beweisen Sie die folgenden Formeln:

a) $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$
b) Gilt $\sigma(X_1)\sigma(X_2) \neq 0$, so folgt $-1 \le \varrho(X_1, X_2) \le 1$.
c) $E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \cdots + a_nE(X_n)$
d) $\mathrm{Var}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_ia_j\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

Aufgabe 22: Gegeben seien ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{t_1, \dots, t_n\}$ und Zufallsvariable $X_1, \dots, X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{Q}$.

a) Implementieren Sie CoCoA-Funktionen `ExpRet(...)`, `VarRet(...)`, `SigRet(...)` sowie `CovRet(...)`, die aus der Liste der Werte $[X_i(t_1), \dots, X_i(t_N)]$ der Zufallsvariablen X_i den Erwartungswert $E(X_i)$, die Varianz $\mathrm{Var}(X_i)$, die Standardabweichung $\sigma(X_i)$ bzw. die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ berechnen.
b) Wenden Sie Ihre Funktionen aus a) auf die folgenden fünf Zufallsvariablen an, die jeweils durch die Liste $[X_i(t_1), \dots, X_i(t_{20})]$ gegeben seien.
   1) $X_1 : [0.935, 0.989, 1.132, 0.687, 0.648, 1.408, 1.083, 0.816, 0.902, 1.035, 1.429, 1.034, 1.229, 1.333, 1.144, 1.022, 0.907, 0.839, 1.208, 1.271]$
   2) $X_2 : [0.713, 1.067, 1.133, 0.739, 1.014, 1.402, 0.904, 1.079, 1.047, 0.865, 0.966, 1.02, 1.127, 1.4, 1.061, 1.664, 1.048, 0.698, 1.328, 1.348]$
   3) $X_3 : [1.078, 1.118, 1.609, 1.167, 0.702, 1.09, 1.046, 1.177, 1.181, 0.831, 1.461, 1.207, 1.032, 1.434, 1.331, 1.104, 1.43, 1.222, 1.53, 1.069]$
   4) $X_4 : [0.981, 1.058, 1.063, 0.99, 0.992, 1.094, 1.056, 1.154, 1.083, 0.998, 0.999, 0.947, 1.137, 1.094, 1.079, 1.081, 1.071, 1.08, 1.04, 1.001]$
   5) $X_5 : [0.992, 1.042, 1.456, 1.437, 1.532, 0.805, 0.872, 1.056, 1.161, 2.056, 1.445, 0.79, 1.164, 0.988, 0.933, 0.815, 0.953, 1.029, 0.954, 0.957]$

Aufgabe 23: Gegeben sei die Situation von §15.B.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `PfEqn(...)`, die das Ideal I der Portfoliogleichungen in $\mathbb{Q}[a_1, \dots, a_n, e, v, \ell, m]$ berechnet.
b) Implementieren Sie eine CoCoA-Funktion `AllParab(...)`, die für jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ das quadratische Polynom $v - q_S(e)$ berechnet und die Liste dieser $2^n - 1$ Polynome ausgibt.
   Hinweis: Schreiben Sie zuerst eine Funktion `AllSubsets(...)`, die die Menge aller nichtleeren Teilmengen $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ berechnet.

Aufgabe 24: Gegeben sei die Situation von §15.B. Ferner sei für jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ein quadratisches Polynom $v - q_S(e)$ gegeben.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `IntPoints`(...), die die im (v, e)-Koordinatensystem oberen Hälften von je zwei Parabeln $\mathcal{Z}(v - q_S(e))$ und $\mathcal{Z}(v - q_{S'}(e))$ zum Schnitt bringt und die Matrix der Approximationen aller Schnittpunkte ausgibt.
Hinweis: Verwenden Sie die Funktionen `Round`(...) und `Sqrt`(...) aus Anhang C.5 des Buches.

b) Implementieren Sie eine CoCoA-Funktion `EffGrenze`(...), die aus allen Parabelstückchen und Schnittpunkten diejenigen herausfindet, die die effiziente Grenze darstellen. Wenden Sie Ihre Funktion auf das Beispiel in Aufgabe 22.b an.

Aufgabe 25: Gegeben sei die Situation von §15.B.

a) Unter Anwendung der Ergebnisse der vorstehenden Aufgaben und des Algorithmus in §15.C, schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `MELPf`(...), die das Portfolio auf der effizienten Grenze berechnet, welches durch die MEL-Regel spezifiziert wird.

b) Wenden Sie diese Funktion auf das Beispiel in Aufgabe 22.b an.