Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth

Klausur zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschafler II

– Lösungen –

Aufgabe 1

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Anzahl der Versuche, bis die beiden Würfel (66) zeigen.
Ereignisraum: $\Omega = \{(11), (12), (13), ..., (66)\}$, $|\Omega| = 36$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses (66) liegt bei $p = \frac{1}{36}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis nicht Eintritt liegt bei $1 - p$.

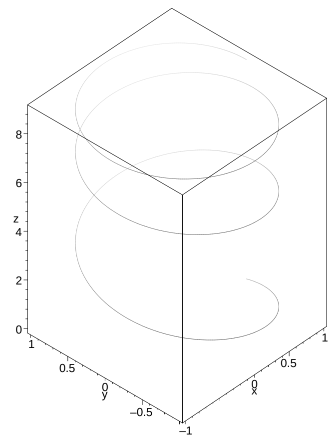
$$\begin{aligned}
P(X(\omega) = 1) &= p, \quad \omega \in \Omega \\
P(X(\omega) = 2) &= (1-p) \cdot p, \quad \omega \in \Omega \\
P(X(\omega) = 3) &= (1-p)^2 \cdot p, \quad \omega \in \Omega \\
&\vdots \\
P(X(\omega) = i) &= (1-p)^{i-1} \cdot p, \quad \omega \in \Omega
\end{aligned}$$

Die durchschnittliche Anzahl der Würfe ergibt sich aus dem Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P(X(\omega) = i) = p \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1} = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} = 36$$

Dabei wurde die Ableitung der geometrischen Reihe verwendet: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i \cdot x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, mit $|x| < 1$.

Aufgabe 2



a)

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$
$x = \cos(2\pi t)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1
$y = \sin(2\pi t)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$z = 9 - t^2$	9	$8\frac{15}{16}$	$8\frac{3}{4}$	$8\frac{7}{16}$	8	$7\frac{7}{16}$	$6\frac{3}{4}$	$5\frac{15}{16}$	5	$4\frac{15}{16}$	$2\frac{3}{4}$

t	$\frac{11}{4}$	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$
$x = \cos(2\pi t)$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$y = \sin(2\pi t)$	-1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$z = 9 - t^2$	$1\frac{7}{16}$	0	$8\frac{35}{36}$	$7\frac{23}{36}$	$8\frac{119}{144}$	$8\frac{63}{64}$

b) Geschwindigkeitsvektor $g(t) := f'(t) = (-2\pi\sin(2\pi t), 2\pi\cos(2\pi t), -2t)$
Absolute Geschwindigkeit $v(t) := \|g(t)\| = \sqrt{4\pi^2 + 4t^2} = 2\sqrt{\pi^2 + t^2}$.
Da $v(t)$ für $t \geq 0$ monoton wachsend ist, wird das Maximum am Rande angenommen.
Damit ist $v(t)$ für $t = 3$ mit $v(3) = 2\sqrt{\pi^2 + 9}$ maximal.

Aufgabe 3

$f(x, y, z) = x^2 e^{y^2+z^2}$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &:= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = 2xe^{y^2+z^2} \\
f_y(x,y,z) &= 2yx^2e^{y^2+z^2} \\
f_z(x,y,z) &= 2zx^2e^{y^2+z^2} \\
f_{xx}(x,y,z) &= 2e^{y^2+z^2} \\
f_{yy}(x,y,z) &= 2x^2(1+2y^2)e^{y^2+z^2} \\
f_{zz}(x,y,z) &= 2x^2(1+2z^2)e^{y^2+z^2} \\
f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) &= 4xye^{y^2+z^2} \\
f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) &= 4xze^{y^2+z^2} \\
f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) &= 4yzx^2e^{y^2+z^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$g(x, y) = \sin(xy)$. Berechne die 1. und 2. Ableitungen im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$$\begin{aligned}
g_x(0,0) &= y\cos(xy)|_{(0,0)} &&= 0 \\
g_y(0,0) &= x\cos(xy)|_{(0,0)} &&= 0 \\
g_{xx}(0,0) &= -y^2\sin(xy)|_{(0,0)} &&= 0 \\
g_{yy}(0,0) &= -x^2\sin(xy)|_{(0,0)} &&= 0 \\
g_{xy}(0,0) = g_{yx}(0,0) &= \cos(xy) - xy\sin(xy)|_{(0,0)} &&= 1
\end{aligned}$$

Taylorentwicklung im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ für $g(x, y)$ liefert nun:

$$\begin{aligned}
g(x,y) &\approx g(x_0,y_0) + (x-x_0)g_x(x_0,y_0) + (y-y_0)g_y(x_0,y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(x-x_0)g_{xx}(x_0,y_0) + (y-y_0)g_{yy}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)g_{xy}(x_0,y_0)\right] \\
&= 0 + x\cdot 0 + y\cdot 0 + \frac{1}{2}(x\cdot 0 + y\cdot 0 + 1\cdot 2xy) \\
&= xy
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

$h(x, y) = \left(\frac{-y^2-1}{x^2}, \frac{2y}{x}\right)$

Überprüfung auf Potential:

$\frac{\partial}{\partial y}h_1(x, y) = \frac{-2y}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}h_2(x, y)$. Damit besitzt h ein Potential.

Berechnung:

$p(x, y) = \int h_1(x, y)dx + c(y) = \int \frac{-y^2-1}{x^2}dx + c(y) = \frac{y^2+1}{x} + c(y)$

$\frac{\partial}{\partial y}p(x, y) = \frac{2y}{x} + c'(y) \overset{!}{=} h_2(x, y) = \frac{2y}{x} \Longleftrightarrow c'(y) = 0 \Longleftrightarrow c(y) = c$

$\Longrightarrow p(x, y) = \frac{y^2+1}{x} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6
Sei der obere Würfel des Turms durch die Kantenlänge a gegeben. Damit ergibt sich die Kantenlänge des unteren Würfels zu $b = h - a$. Die Dichte wird mit ρ bezeichnet.
Die Masse des Turms ist damit durch $M(a) = 4\rho a^3 + \rho(h-a)^3$ gegeben. Zur Minimierung wird die erste Ableitung von $M(a)$ gleich Null gesetzt.

$$M'(a) = \rho(12a^2 - 3(h-a)^2) = \rho(9a^2 + 6ha - 3h^2) \stackrel{!}{=} 0$$

Damit ist $a_{1,2} = \frac{-6h \pm \sqrt{36h^2 - 108h^2}}{18} = \frac{-6h \pm 12h}{18} \Longrightarrow a_1 = \frac{h}{3} \quad (a_2 = -h)$. Für $h = 6$ ergibt sich somit $a = 2$. Überprüfung auf Minimum:

$$M''(a) = \rho(24a + 6(h-a)) = \rho(18a + 6h) \quad M''(2) = 50\rho > 0$$

$\Longrightarrow$ Minimum bei $a = 2$ und somit $b = 4$ und $M(2) = 96\rho$.

Aufgabe 7

a) $g'(t) = (-4\sin(t), 4\cos(t), 3)$, $\|g'(t)\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Damit ist $L = \int_0^{4\pi} \|g'(t)\| = \int_0^{4\pi} 5 = 20\pi$

b) $\int_0^{4\pi} < v(g(t)), g'(t) > dt = \int_0^{4\pi} -4\sin(t) \cdot (-4\sin(t)) + 4\cos(t) \cdot 4\cos(t) + (10 - 3t) \cdot 3\, dt = \int_0^{4\pi} 16 + 30 - 9t\, dt = 46t - \frac{9}{2}t^2|_0^{4\pi} = 184\pi - 72\pi^2$

Aufgabe 8
Prüfe die Determinante der Matrix A auf Null.
$\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow A$ bijektiv.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & 10 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -185 - 3 \cdot (-68) - 45 = -26.$$

$\Longrightarrow A$ bijektiv.

Aufgabe 9
$y' = y(1+x)$. Ansatz mit getrennten Variablen: $g(y) = y$ und $f(x) = 1 + x$.
Damit folgt

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{y_0}^{y} \frac{1}{t}\, dt = \ln(t)|_{y_0}^{y} = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \\ F(x) &= \int_{x_0}^{x} 1 + t\, dt = t + \frac{1}{2}t^2|_{x_0}^{x} = (x - x_0) + \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) \end{aligned}$$

Mit $G(\varphi(x)) = F(x)$ folgt $\varphi(x) = y_0 e^{\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + x - x_0}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.