1. Zwei Würfel werden immer wieder gleichzeitig geworfen, und zwar so lange, bis beide eine Sechs zeigen. Wie oft muß man die Würfel durchschnittlich werfen? (Mit Beweis!)

Lösung:

2. Ein Blatt fällt längs der Kurve $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die durch

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 9 - t^2)$$

gegeben ist, von einem Baum herab.

(a) Skizieren Sie den Graph der Funktion f. Geben Sie dazu mindestens 15 Funktionswerte explizit an.

(b) Geben Sie die Funktion an, die die absolute Geschwindigkeit des Blattes beschreibt. Wann ist diese am größten?

Lösung:

3. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y, z) = x^2 e^{y^2+z^2}$ bis zur zweiten Ordnung.

Lösung:

4. Bestimmen sie das Polynom zweiten Grades, das die Funktion $g(x,y) = \sin(xy)$ in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) = (0,0)$ am besten approximiert.

Lösung:

5. Eine Funktion $h\ :]0,\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $h(x,y) = \left(\frac{-y^2-1}{x^2}, \frac{2y}{x}\right)$. Besitzt h ein Potential? Wenn ja, so berechnen Sie dieses!

Lösung:

6. Ein 6 m hoher Turm soll aus zwei würfelförmigen Stockwerken bestehen. Das obere Stockwerk habe die vierfache Dichte des unteren. Wie sind die Dimensionen der beiden Stockwerke zu wählen, damit die Gesamtmasse des Turmes minimal wird?

Lösung:

7. Das Ende eines Hubschrauberrotorblattes wird beim Aufstieg durch die Kurve

$$g : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(t) = (4\cos(t), 4\sin(t), 3t)$$

beschrieben.

(a) Wie lange ist die Kurve?

(b) Integrieren Sie das Vektorfeld $v(x, y, z) = (-y, x, 10 - z)$ längs dieser Kurve!

Lösung:

8. Ist die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ definierte lineare Abbildung $l : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ bijektiv?

Lösung:

9. Finden Sie **alle** Lösungen der Differentialgleichung $y' = y + xy$.

Lösung: