Musterlösung zu Blatt 2

Aufgabe 1

Münze 1 : zwei goldene Seiten
Münze 2 : zwei silberne Seiten
Münze 3 : eine goldene und eine silberne Seite

Ω = { M1 Gold1, M1 Gold2, M2 Silber1, M2 Silber2, M3 Gold, M3 Silber}
(M1 Gold heißt, die erste Münze liegt im geöffneten Fach mit goldener Seite oben)

A : = obere Seite der Münze ist golden
B : = untere Seite der Münze ist golden

Gesucht: P(B | A)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2

Annahme: Der Hauptgewinn ist hinter Tür 1.

Der Kandidat wählt eine Tür. Mit Wahrscheinlichkeit 1/3 wählt er die richtige, mit Wahrscheinlichkeit 2/3 eine falsche Tür.

Der Moderator öffnet nun eine Tür, hinter der kein Preis ist. Zu unterscheiden sind zwei Fälle:
1) Der Kandidat wählte die richtige Tür, d.h. der Moderator kann zwischen Tür 2 und Tür 3 wählen.
2) Der Kandidat wählte eine der falschen Türen, d.h. der Moderator muß die verbleibende falsche Tür wählen.

Die Wahl von Kandidat und Moderator kann als Menge aller Paare $(\omega1,\omega2)$ mit $\omega1 \neq \omega2$, $\omega1 \in \{1,2,3\}$, $\omega2 \in \{2,3\}$ dargestellt werden:
$\Omega = \{ (1,2) , (1,3) , (2,3) , (3,2) \}$

Da der Kandidat zufällig wählt, gilt für die Wahl der Tür mit Ziffer i (K = i)
P(K = i) = 1/3, i = 1,2,3
also
P(K = 1) = P({ (1,2) , (1,3) }) = 1/3,
P(K = 2) = P({ (2,3) }) = 1/3
P(K = 3) = P({ (3,2) }) = 1/3

Die Wahl des Moderators hängt von der Wahl des Kandidaten ab. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten sind, wenn der Moderator in Fall 1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit zwischen den Türen wählt:

P(M = 2 | K = 1) = P(M = 3 | K = 1) = ½
P(M = 2 | K = 3) = P(M = 3 | K = 2) = 1
Also:
P({ (1,2) }) = P(M = 2 | K = 1) * P(K = 1) = ½ * 1/3 = 1/6
P({ (1,3) }) = P(M = 3 | K = 1) * P(K = 1) = ½ * 1/3 = 1/6
P({ (2,3) }) = P(M = 3 | K = 2) * P(K = 2) = 1 * 1/3 = 1/3
P({ (3,2) }) = P(M = 2 | K = 3) * P(K = 3) = 1 * 1/3 = 1/3

Damit gilt:
P(Kandidat wechselt und verliert) = P({(1,2)}) + P({ (1,3) }) = 1/3

P(Kandidat wechselt und gewinnt) = P({ (2,3) }) + P({ (3,2) }) = 2/3

Es lohnt sich also zu wechseln.

Aufgabe 3

P(Gewinn bei einem Spiel) = $\dfrac{12}{\binom{49}{6}}$ =: p
X := Wartezeit, bis einschließlich zum ersten Lotto−Sechser

Die Wahrscheinlichkeit, beim k−ten Spiel zum ersten Mal zu gewinnen, berechnet sich durch:

$P(X = k) = (1-p)^{k-1} * p$

Da nach der durchschnittlichen Spieldauer bis zum ersten Lotto−Sechser gefragt ist, muß der Erwartungswert der geometrischen Verteilung berechnet werden:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} * p = p * \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p * \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} = \frac{\binom{49}{6}}{12} = 11$$

65318

⇒ er muß durchschnittlich 1165318 mal spielen.

Aufgabe 4

a) Der Standardwürfel A=(1,2,3,4,5,6) ist unbesiegbar
Beweis:
A : =(1,2,3,4,5,6),
B : =($1+\Delta_1$, $2+\Delta_2$, $3+\Delta_3$,$4+\Delta_4$,$5+\Delta_5$,$6+\Delta_6$) so daß $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5+\Delta_6 = 0$, $\Delta_i \in [1-i ; 6-i]$

In wie vielen Fällen schlägt Würfel B den Würfel A?
$i + \Delta_i$ schlägt alle Würfe von A, deren Augenzahl kleiner ist, also die Würfe $1,...,i +\Delta_i -1$,
das sind genau $i +\Delta_i -1$ Fälle. (i = 1,...,6)
Also: Anzahl der Fälle, in denen B den Würfel A schlägt:

$$\Delta_1 + (\Delta_2 + 1) + (\Delta_3 + 2) + (\Delta_4 + 3) + (\Delta_5 + 4) + (\Delta_6 + 5) = \sum_{i=1}^{5} i + \sum_{i=1}^{6} \Delta_i = 15 + 0 = 15$$

Umgekehrt: In wie vielen Fällen schlägt A den Würfel B?
$i + \Delta_i$ wird von allen Würfen von A geschlagen, deren Augenzahl größer ist, also von $i+\Delta_i +1,...,6$
das sind genau $6-i-\Delta_i$ Fälle, also:

$$(5-\Delta_1) + (4-\Delta_2) + (3-\Delta_3) + (2-\Delta_4) + (1-\Delta_5) + \Delta_6 = \sum_{i=1}^{5} i - \sum_{i=1}^{6} \Delta_1 = 15 - 0 = 15$$

A schlägt B bei 15 Wurfkombinationen, B schlägt A bei 15 Wurfkombinationen, also spielt A mit jedem beliebigen Würfel unentschieden
⇒ der Standardwürfel A ist unbesiegbar

b) Eine mögliche Lösung von drei Würfeln, die sich reihum schlagen:

A = (1,1,1,6,6,6)   B = (1,4,4,4,4,4)   C = (3,3,3,3,3,6)

A schlägt B in 18 Fällen: {15*(6,4), 3*(6,1)}, B schlägt A nur in 15 Fällen: { 15*(1,4)}
B schlägt C in 25 Fällen: {25*(4,3)}, C schlägt B nur in 11 Fällen: { 5*(1,3), (1,6), 5*(4,6)}
C schlägt A in 18 Fällen: {15*(3,1), 3*(6,1)}, A schlägt C nur in 15 Fällen: {15*(3,6)}

Aufgabe 5

A : = Korrektor stellt Fehler fest
F : = Lösung ist falsch

Gegeben:
P(A) = 0.1 P(A | F) = 0.94 P(A | ¬F) = 0.42

a) Gesucht: P(F | A)

$$P(F|A) = P(A|F) * \frac{P(F)}{P(A)}$$

Berechnung von P(F):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(F) * P(A|F) + P(\neg F) * P(A|\neg F) \\ &= P(F) * P(A|F) + (1 - P(F)) * P(A|\neg F) \end{aligned}$$

⇒ 0.1 = P (F) * 0.94 + (1 − P(F)) * 0.42
⇔ P(F) = 0.0646

$$\Rightarrow \quad P(F|A) = 0.94 * \frac{0.0646}{0.1} = 0.6071$$

b) Gesucht: P(¬A | F) = 1 − P(A | F) = 0.06

c) Das Korrekturverfahren arbeitet nicht zufriedenstellend.
" Im Zweifel für den Angeklagten" bedeutet hier:
eher sollte eine falsche Lösung durchkommen (P(¬A | F) = 0.4 %) als dass eine verworfene Lösung richtig ist (P(¬F | A) = 39 %).

d) A1 : = 1.Korrektor stellt Fehler fest
A2 : = 2.Korrektor stellt Fehler fest

Gegeben:
P(A1) = P(A2) = 0.1
P(A1 | F) = P(A2 | F) = 0.94
P(A1 | ¬F) = P(A2 | ¬ F) = 0.42
P(F) = 0.0646

Gesucht: P(F | A1 ∩ A2), P(F | ¬ (A1 ∩ A2))

$$P(F|A1 \cap A2) = \frac{P(A1 \cap A2|F) * P(F)}{P(A1 \cap A2)}$$

Weiter ist P(A2 | A1 ∩ F) = P(A2 | F) , da der 2. Korrektor unabhängig vom ersten arbeitet.

$$P(A1 \cap A2|F) = \frac{P(A1 \cap A2 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A2|A1 \cap F) * P(A1 \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A2|F) * P(A1|F) * P(F)}{P(F)}$$

$$= P(A2|F) * P(A1|F) = 0.94 * 0.94 = 0.8836$$

P(A1 ∩ A2) = P(A1 ∩ A2 ∩ F) + P(A1 ∩ A2 ∩ ¬F)
s.o.
= P(A1 | F) * P(A2 | F) * P(F) + P(A1 | ¬F) * P(A2 | ¬ F) * P(¬F)

= 0.94 * 0.94 * 0.0646 + 0.042 * 0.042 * 0.9354 ≈ 0.05872

⇒ P(F | A1 ∩ A2) = 0.8836 * 0.0646 / 0.05872 ≈ 0.9719

$$P(F|\neg(A1 \cap A2)) = \frac{P(F \cap \neg(A1 \cap A2))}{P(\neg(A1 \cap A2))} = \frac{P(F) - P(F \cap A1 \cap A2)}{1 - P(A1 \cap A2)}$$

$$= \frac{P(F) * (1 - P(A1|F) * P(A2|F))}{1 - P(A1 \cap A2)} = \frac{0.0646 * (1 - 0.94 * 0.94)}{1 - 0.05872}$$

$$= 0.0080$$

Fazit: Das Korrekturverfahren wird wesentlich verbessert!