Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth

SS 2001

Übungen zur Vorlesung

Praktische Anwendungen der Computeralgebra 2

Blatt 1

Abgabetermin: Mi, 23.5.2001

Aufgabe 1: Sei Γ eine kommutatives Monoid, in dem die Kürzungsregel gilt, und sei R ein Γ-graduierter Ring. Beweisen Sie $1 \in R_0$.

Aufgabe 2: Sei R ein Ring.

a) Versehen Sie die Menge $\Gamma = \{0, \infty\}$ mit der "natürlichen" Addition und beweisen Sie, dass sie dadurch zu einem kommutativen Monoid wird, in dem die Kürzungsregel nicht gilt.

b) Setzen Sie $\deg(r) = \infty$ für alle $r \in R$. Zeigen Sie, dass R dadurch zu einem Γ-graduierten Ring wird, in dem das Element 1 homogen von einem Grad ungleich Null ist.

c) Versehen Sie die Menge $S = R \oplus R$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation und definieren Sie $S_0 = R \oplus 0$ sowie $S_\infty = 0 \oplus R$. Beweisen Sie, dass S dadurch ein Γ-graduierter Ring wird, in dem das Einselement $1 = (1, 1)$ nicht homogen ist.

Aufgabe 3: Sei Γ ein kommutatives Monoid, in dem die Kürzungsregel gilt. Ein Γ-graduierter Ring R heißt ein **Γ-graduierter Körper**, wenn jedes homogene Element von $R \setminus \{0\}$ eine Einheit ist. Sei R ein solcher Γ-graduierter Körper.

a) Zeigen Sie, dass R_0 ein Körper ist und dass für jedes $\gamma \in \Gamma$ die Menge R_γ ein R_0-Vektorraum der Dimension ≤ 1 ist.

b) Verwenden Sie den Ring $K[x, x^{-1}]$ um zu zeigen, dass es Γ-graduierte Körper gibt, die keine Körper sind.

c) Beweisen Sie, dass die Menge $\{\gamma \in \Gamma \mid R_\gamma \neq 0\}$ eine Gruppe ist.

d) Sei M ein endlich erzeugter Γ-graduierter R-Modul. Zeigen Sie, dass M eine R-Basis aus homogenen Elementen besitzt.

Aufgabe 4: Der Polynomring $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper K sei standard-graduiert.

a) Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und seien $f, g \in P$. Zeigen Sie $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$.

b) Sei $d \geq 0$ und sei $f \in P$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Beweisen Sie mit Hilfe von a) **Euler's Formel** $d\, f = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Aufgabe 5: Der Polynomring $P = K[x_1, \dots, x_n]$ über einem Körper K sei standard-graduiert. Sei $\{f_1, \dots, f_s\}$ eine Menge von homogenen Polynomen und $I = (f_1, \dots, f_s)$. Ferner sei eine Termordnung σ gegeben.

a) Implementieren Sie die homogene Version von Buchberger's Algorithmus mit Minimalisierung in einer CoCoA-Funktion `HomBuchberger`$(\dots)$. Verwenden Sie dabei die eingebaute Funktion `NR`$(\dots)$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktion die Gröbner-Basen und minimalen Erzeugendensysteme der folgenden Ideale bzgl. der angegebenen Termordnungen.
   1) $I_1 = (x_1^2 - x_1x_2,\ x_1^2 - x_2x_3,\ x_1^3 - x_2x_3^2,\ x_2^5 - x_3^5) \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ bzgl. $\sigma =$ `DegRevLex`
   2) $I_2 = (x_1x_4^3 - x_3^4,\ x_2x_4^4 - x_3^5) \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ bzgl. $\sigma =$ `Lex`
   3) $I_3 = (x_1^6 - x_2x_3^4x_4,\ x_1x_2^4 - x_3^5,\ x_1^5x_3 - x_2^5x_4) \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ bzgl. $\sigma =$ `DegRevLex`