Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth

SS 2001

Übungen zur Vorlesung

Praktische Anwendungen der Computeralgebra 2

Blatt 2

Abgabetermin: Mi, 13.6.2001

Aufgabe 6: Sei K ein Körper und der Polynomring $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ sei graduiert durch $W \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{Z})$.

a) Zeigen Sie, dass es im Fall $m = 2$, $n = 3$, $W = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ keine Termordnung auf $\mathbb{T}^n$ gibt, die mit $\deg_W$ kompatibel ist.

b) Finden Sie eine Matrix $W \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{Z})$, so dass es eine $\deg_W$-kompatible Termordnung auf $\mathbb{T}^n$ gibt, aber keine Termordnung vom x_i-DegRev-Typ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 7: In der Situation von Satz 3.5 sei $\ell \geq 1$ und $\beta_j = \max\{0, \alpha_j - \ell\}$ für $j = 1, \ldots, s$.

a) Beweisen Sie, dass $\{x_0^{\beta_1} g_1, \ldots, x_0^{\beta_s} g_s\}$ eine σ-Gröbner Basis von $M :_P (x_0^\ell)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $\ell \geq \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ gilt:

$$M :_P (x_0)^\infty = M :_P (x_0^\ell)$$

Aufgabe 8: Der Polynomring $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper K sei standard-graduiert. Beschreiben Sie die homogenen Ideale $I \subseteq P$, für die die Hilbert-Funktion $\mathrm{HF}_{P/I}(i)$ für $i \geq 0$ konstant ist.

Aufgabe 9: Der Polynomring $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper K sei standard-graduiert, und I, J seien zwei homogene Ideale in P. Beweisen Sie:

a) $\mathcal{N}_{P/I}(t) + \mathcal{N}_{P/J}(t) = \mathcal{N}_{P/(I+J)}(t) + \mathcal{N}_{P/(I\cap J)}(t)$

b) $\mathcal{N}_I(t) + \mathcal{N}_J(t) = \mathcal{N}_{I+J}(t) + \mathcal{N}_{I\cap J}(t)$, wobei die auftretenden Ideale als graduierte P-Moduln betrachtet werden.

Aufgabe 10: Der Polynomring $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper K sei standard-graduiert.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `MonHS(...)`, die die Hilbert-Reihe von P/I als Element in $\mathbb{Q}(t)$ nach der in der Vorlesung angegebenen Methode berechnet, wenn $I \subseteq P$ ein monomiales Ideal ist.

b) Implementieren Sie eine CoCoA-Funktion `IdealHS(...)`, die mit a) und `GBasis(...)` die Hilbert-Reihe von P/I für ein homogenes Ideal $I \subseteq P$ berechnet.

c) Berechnen Sie mittels `IdealHS(...)` die Hilbert-Reihen der Ringe P/I_i in den folgenden Fällen:

   1) $I_1 = (x^3, y^4, z^5) \subseteq P = \mathbb{Q}[x, y, z]$
   2) $I_2 = (x_0x_3 - x_1x_2,\ x_0x_2 - x_1^2,\ x_2^2 - x_1x_3) \subseteq \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, x_3]$
   3) $I_3 = (xz - z^2, y^2z - yz^2, x^2y - 3/2xy^2 + 1/2y^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$