Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth SS 2001

Übungen zur Vorlesung

Praktische Anwendungen der Computeralgebra 2

Blatt 3: Photogrammetrie

Abgabetermin: Do, 5.7.2001

Aufgabe 11: Der Polynomring $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper K sei standard-graduiert und

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

sei eine homogene exakte Sequenz graduierter P-Moduln. Beweisen Sie die folgenden Formeln.

a) $\dim(M) = \max\{\dim(M'), \dim(M'')\}$
b) $\dim(M') = \dim(M'') \quad \Rightarrow \quad \mathrm{mult}(M) = \mathrm{mult}(M') + \mathrm{mult}(M'')$
c) $\dim(M') > \dim(M'') \quad \Rightarrow \quad \mathrm{mult}(M) = \mathrm{mult}(M')$
d) $\dim(M') < \dim(M'') \quad \Rightarrow \quad \mathrm{mult}(M) = \mathrm{mult}(M'')$

Aufgabe 12: Sei E eine essentielle Matrix. Zeigen Sie:

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot E$ eine essentielle Matrix.
b) Für alle $U, V \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ist UEV eine essentielle Matrix.
c) Auch E^{tr} ist eine essentielle Matrix.
d) Schreibt man $E = RT_a$ mit $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}^3$ und ist $b = Ra$, so gilt $E = T_b R$.

Aufgabe 13: Sei $E \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{Q})$.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `IsEssential`(E), die mit Hilfe von Theorem 6.19 prüft, ob E eine essentielle Matrix ist und den entsprechenden Boolschen Wert ausgibt.
b) Sei E eine essentielle Matrix. Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `Decompose`(E), die die möglichen Zerlegungen $E = RT_a$ mit $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}^3$ berechnet.
Hinweis: Betrachten Sie die Einträge von R und a als Unbestimmte und lösen Sie das sich ergebende algebraische Gleichungssystem.

Aufgabe 14: Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `EssentialIdeal`(), die das in Bemerkung 6.22.a beschriebene Ideal $I \subseteq \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_8]$ berechnet, welches die essentielle Varietät $\mathbb{E}$ definiert. Beweisen oder widerlegen Sie dann mit Hilfe von CoCoA die folgenden Aussagen.

a) Das Ideal I ist ein homogenes Radikalideal, d.h. es ist das größte Ideal, das die essentielle Varietät $\mathbb{E}$ definiert.
b) Das Ideal I ist ein Primideal, d.h. die essentielle Varietät $\mathbb{E}$ ist eine irreduzible projektive Varietät in $\mathbb{P}^8$.

c) Es gilt $\dim(\mathbb{E}) = 5$ und $\deg(\mathbb{E}) = 10$. Berechnen Sie allgemeiner die Hilbert-Reihe und das Hilbert-Polynom von $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_8]/I$.

d) Schneidet man $\mathbb{E}$ mit einem generisch gewählten linearen Unterraum $L \subseteq \mathbb{P}^8$ der Dimension 3, so erhält man 10 Punkte.

Aufgabe 15: Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `Reconstruct`(M), die zu einer vorgegebenen endlichen Menge von Korrespondenzpaaren $M = \{q_i \leftrightarrow q_i'\}_{i=1,\dots,n}$ die möglichen Rekonstruktionen (R, T_a) berechnet. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1) Bestimmen Sie die zu den Gleichungen $(q_i')^{\mathrm{tr}}\, E\, q_i = 0$ gehörigen Hyperebenen in $\mathbb{P}^8$.
2) Schneiden Sie die essentielle Varietät $\mathbb{E}$ mit diesen Hyperebenen.
3) Prüfen Sie, ob es endlich viele Rekonstruktionen gibt. Falls nicht, geben Sie eine Fehlermeldung aus.
4) Für jede passende essentielle Matrix E berechnen Sie die zugehörigen Rekonstruktionen mit Hilfe der Funktion `Decompose`(E) aus Aufgabe 13.

Wenden Sie Ihre Funktion `Reconstruct`(M) an einigen selbstgewählten Beispielen an.