Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fachbereich Mathematik
Universität Bayreuth

SS 2001

Übungen zur Vorlesung

Praktische Anwendungen der Computeralgebra 2

Blatt 4

Abgabetermin: Do, 26.7.2001

Aufgabe 16: (Hyperebenen im projektive Raum)
Sei K ein Körper und $H \subseteq \mathbb{P}^n_K$ eine Hyperebene.

a) Finden Sie ein Tupel $(a_0, \ldots, a_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, so dass H aus allen Punkten $(p_0 : \ldots : p_n)$ besteht für die $a_0 p_0 + \cdots + a_n p_n = 0$ ist. (Zeigen Sie zuerst, dass diese Bedingung wohldefiniert ist.)

b) Beweisen Sie, dass zwei Tupel $(a_0, \ldots, a_n)$ und $(b_0, \ldots, b_n)$ genau dann auf die in a) beschriebene Weise die gleiche Hyperebene $H \subseteq \mathbb{P}^n_K$ definieren, wenn es ein Element $\lambda \in K \setminus \{0\}$ gibt mit $(a_0, \ldots, a_n) = \lambda \cdot (b_0, \ldots, b_n)$.

c) Zeigen Sie, dass sich zwei Geraden in $\mathbb{P}^2_K$ immer in genau einem Punkt schneiden.

Aufgabe 17: (Der duale projektive Raum)
Sei K ein Körper und sei $\mathrm{Hyp}(\mathbb{P}^n_K)$ die Menge der Hyperebenen in $\mathbb{P}^n_K$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 16, dass es eine wohldefinierte Abbildung $\eta : \mathrm{Hyp}(\mathbb{P}^n_K) \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$ gibt, die H auf $(a_0, \ldots, a_n)$ abbildet.

b) Beweisen Sie, dass die Abbildung η bijektiv ist. Daher können wir die Menge $\mathrm{Hyp}(\mathbb{P}^n_K)$ als n-dimensionalen projektiven Raum über K betrachten. Wir nennen ihn den **dualen projektiven Raum** und schreiben $(\mathbb{P}^n_K)\check{}$.

c) Sei S die Menge aller Punkte in $(\mathbb{P}^n_K)\check{}$, die zu Hyperebenen durch den Punkt $(0 : \ldots : 0 : 1)$ gehören. Zeigen Sie, dass S eine Hyperebene in $(\mathbb{P}^n_K)\check{}$ ist.

d) Nun sei p eine Primzahl und K der endliche Körper $K = \mathbb{F}_p$. Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `Hyperplanes(...)`, die ausgehend von einem Punkt $(p_0 : \ldots : p_n)$ in $\mathbb{P}^n_K$ die Liste aller Tupel $(a_0, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$ berechnet, die zu den Hyperebenen durch diesen Punkt gehören. Wenden Sie Ihre Funktion im Fall $p = 3$ auf die folgenden Punkte an.
   1) $P = (0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2_K$
   2) $P = (0 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^2_K$
   3) $P = (1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^2_K$

Aufgabe 18: (Grassmannsche Varietäten)
Sei K ein Körper und sei $\mathrm{Lin}(\mathbb{P}^3_K)$ die Menge der Geraden in $\mathbb{P}^3_K$.

a) Erklären Sie, wie man $\mathrm{Lin}(\mathbb{P}^3_K)$ mit der Menge aller 2-dimensionalen K-Untervektorräume von K^4 identifizieren kann.

b) Nun definieren wir eine Abbildung $\varphi : \mathrm{Lin}(\mathbb{P}^3_K) \longrightarrow \mathbb{P}^5_K$ wie folgt.

Repräsentiere den zu einer Geraden $L \subseteq \mathbb{P}^3_K$ gehörigen 2-dimensionalen Vektorraum $V \subseteq K^4$ durch eine Matrix

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

und bilde das 6-Tupel der 2×2-Minoren $(d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34})$, wobei d_{ij} zu den Zeilen i und j gehöre. Nun setze $\varphi(L) = (d_{12} : d_{13} : d_{14} : d_{23} : d_{24} : d_{34})$. Beweisen Sie, dass die Abbildung φ wohldefiniert und injektiv ist. Ihr Bild heisst die **Grassmannsche Varietät** der Geraden in $\mathbb{P}^3_K$ und wird mit $\mathrm{Grass}_1(\mathbb{P}^3_K)$ bezeichnet.

Hinweis: Zeigen Sie, das man o.E. $d_{12} \neq 0$ annehmen kann sowie $a_{ij} = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, 2$.

c) Nun wollen wir noch zeigen, dass $\mathrm{Grass}_1(\mathbb{P}^3_K)$ eine projektive Varietät in $\mathbb{P}^5_K$ ist. Dazu beweisen Sie zunächst, dass die Minoren d_{ij} der folgenden Gleichung genügen:

$$d_{12}d_{34} - d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23} = 0$$

d) Zeigen Sie mit Hilfe von CoCoA, dass die Gleichung in c) die einzige ist, die unter diesen Minoren gilt. Definieren Sie dazu ein passendes Ideal I im Polynomring

$$P = K[d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}]$$

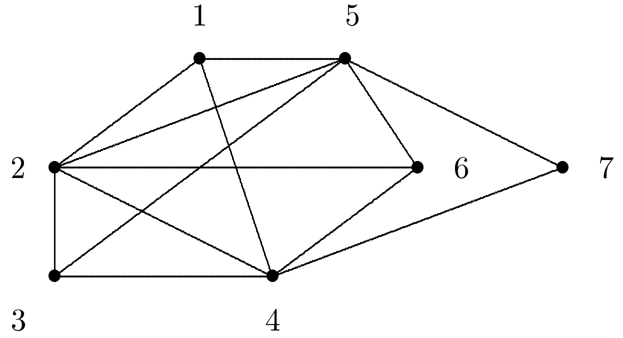
und berechnen Sie das Eliminationsideal $I \cap K[d_{12}, \ldots, d_{34}]$. Folgern Sie, dass $\mathrm{Grass}_1(\mathbb{P}^3_K)$ die von einer quadratischen Gleichung definierte Hyperfläche in $\mathbb{P}^5_K$ ist.

Aufgabe 19: (Graphenfärbungen)

Sei ein Graph gegeben durch die Nummern $\{1, \ldots, n\}$ seiner Ecken und die Paare in $\{1, \ldots, n\}^2$, die seinen Kanten entsprechen.

a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `Colouring`(...), die die Liste der Kanten nimmt und ein Ideal I in $P = \mathbb{F}_3[x_1, \ldots, x_n]$ berechnet, dessen Nullstellen genau die 3-Färbungen des Graphen sind. Dabei sei o.E. die Ecke Nr. 1 mit "0" gefärbt und Nr. 2 mit "1".

b) Wenden Sie Ihre Funktion `Colouring`(...) auf den folgenden Graph an:



Bestimmen Sie mit Hilfe von CoCoA die reduzierte `Lex`-Gröbner Basis dieses Ideals. Hat der Graph eine 3-Färbung? Wenn ja, wieviele verschiedene 3-Färbungen gibt es?

c) Betrachten Sie nun den Graph, der entsteht, indem man die Mitte eines regulären 7-Ecks mit den Ecken verbindet. (Dieser Graph hat 8 Ecken und 14 Kanten.) Verwenden Sie CoCoA, um zu zeigen, dass dieser Graph keine 3-Färbung besitzt.

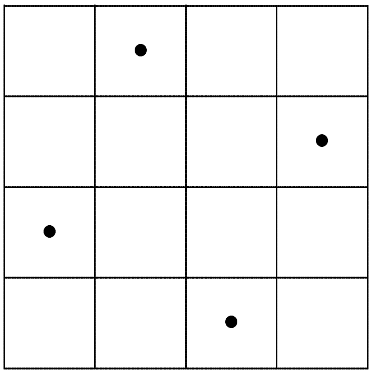
Aufgabe 20: (Das 8-Damenproblem)
Sei ein $n \times n$-Schachbrett wie in der Vorlesung durch Unbestimmte $(x_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ beschrieben.

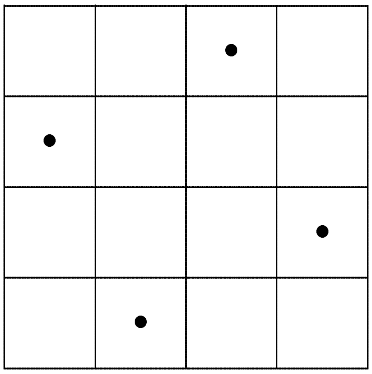
a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `IsMove(...)`, die zwei Felder (d.h. zwei Unbestimmte) nimmt und prüft, ob eine Dame von dem einen Feld auf das andere ziehen kann.

b) Implementieren Sie eine CoCoA-Funktion `QueenIdeal(...)`, die das Ideal berechnet, das allen möglichen Damenzügen auf einem $n \times n$-Schachbrett entspricht.

c) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `Puzzle(...)`, die die maximale Anzahl N von Damen berechnet, die man auf ein $n \times n$-Schachbrett stellen kann, ohne dass sich zwei gegenseitig attackieren, und die die Anzahl aller möglichen Lösungen für N Damen ausgibt.

d) Prüfen Sie Ihre Funktionen, indem Sie direkt zeigen, dass sich für $n = 4$ die Zahl $N = 4$ ergibt und dass nur die folgenden beiden Möglichkeiten existieren:





Lösen Sie die Aufgabe auch für möglichst viele $n = 3, 4, 5, \ldots$, insbesondere für den klassischen Fall $n = 8$.