M. Kreuzer
A. Fischer

Sommersemester 02

Übungsaufgaben
zur Vorlesung "Lineare Algebra I" für Lehramt

Blatt 10 **Abgabe bis 25.6.02 um 10.00 Uhr**

Aufgabe 1

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei $f : V \longrightarrow V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.
a) Zeigen Sie, dass $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi(v,w) := < f(v), w >$ eine Bilinearform von V definiert.
b) Bestimmen Sie f im Fall $V = \mathbb{R}^4$ so, dass ϕ ein Skalarprodukt ist, dessen Gram'sche Matrix nur positive Einträge hat.

Aufgabe 2

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \times V \longrightarrow K$ eine Bilinearform.
a) Zeigen Sie, dass $R := \{v \in V \mid v^{\perp} = V\}$ ein K-Untervektorraum von V ist. Er heißt das Radikal von ϕ.
b) Sei $A := (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V. Bestimmen Sie das Radikal der Bilinearform

$$\phi : V \times V \longrightarrow K \text{ mit } G_A(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei $S \subseteq Mat_n(K)$ die Menge der symmetrischen Matrizen.
a) Beweisen Sie, dass S ein K-Vektorraum von $Mat_n(K)$ ist.
b) Bestimmen Sie eine K-Basis und die Dimension von S.

Aufgabe 4

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Basis $A := (v_1, ..., v_n)$ und sei $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Dann heißt $\det G_A(\phi)$ die Gram'sche Determinante von ϕ bzgl. A.
Zeigen Sie, dass $\det G_A(\phi) > 0$ gilt.

bitte wenden

Aufgabe 5

Sei $M \in Mat_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit Matrix $M_f = M$.

a) Zeigen Sie, dass man wie folgt eine Orthonormalbasis (kurz: ONB) von $\mathbb{R}^n$ (bzgl. des Standardskalarprodukts) berechnen kann, die aus Eigenvektoren von f besteht, indem Sie die Punkte (1) und (4) begründen:
(1) Berechne $\chi_f(x)$ und faktorisiere $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x - \lambda_m)^{k_m}$.
(2) Für $i = 1, ..., m$ bestimme eine $\mathbb{R}$-Basis von $Eig(f, \lambda_i)$.
(3) Für $i = 1, ..., m$ orthonormalisiere die Basis von $Eig(f, \lambda_i)$ mit Hilfe des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens.
(4) Die m ONB zusammen bilden die gesuchte ONB von $\mathbb{R}^n$.

b) Implementieren Sie den Algorithmus aus a) in einer Maple-Prozedur EWONB(M).

c) Wenden Sie Ihre Funktion an für:

(1) $M_1 := \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -14/15 & 2/15 \\ 2/3 & 2/15 & -11/15 \end{pmatrix}$.

(2) $M_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.