M. Kreuzer
A. Fischer

Sommersemester 02

Übungsaufgaben
zur Vorlesung "Lineare Algebra I" für Lehramt

Blatt 2: "Der letzte knipst das Licht aus" **Abgabe bis 30.4.02 um 10.00 Uhr**

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Aufgabe 2

In einem Stromkreislauf befinden sich n Lampen und bei jeder Lampe ein Schalter. Die Verbindungen der Lampen und die Wirkungsweise der Schalter wird durch einen mathematischen Graphen in folgender Weise dargestellt: Der Graph besitzt n Ecken $P_1, ..., P_n$, welche für die n Lampen und Schalter stehen, und einige Kanten, die Ecken miteinander verbinden. Dabei bedeutet die Verbindung von zwei Ecken durch eine Kante, dass bei Betätigung eines Schalters, der zu einer dieser beiden Ecken gehört, die Lampen, die zu den beiden Ecken gehören, beide umgeschaltet werden.

a) Zeichnen Sie einen Graphen, der folgende Situation beschreibt:
Es gibt eine rote, eine blaue, eine grüne, eine gelbe und eine schwarze Lampe in einem Stromkreislauf. Wird der Schalter bei der roten Lampe betätigt, so ändern sich die Zustände aller Lampen außer der gelben, wird der Schalter bei der blauen Lampe geändert, so ändern sich die Zustände aller Lampen außr der schwarzen, wird der Schalter bei der gelben Lampe betätigt, so ändern sich die Zustände der gelben, der blauen und der schwarzen Lampe, wird der Schalter bei der schwarzen Lampe betätigt, so ändern sich die Zustände bei der schwarzen, der roten und der gelben Lampe und wird der Schalter bei der grünen Lampe betätigt, so ändern sich die Zustände bei der grünen, der roten und der blauen Lampe.

b) Folgender Graph beschreibt einen Stromkreislauf:

Die Lampen bei P_1 und bei P_2 brennen, die übrigen brennen nicht. Geben Sie die Zustände aller Lampen an, nachdem die Schalter bei P_3 und bei P_6 umgestellt wurden.

Aufgabe 3

Die Information, welche ein Graph aus Aufgabe 2 enthält, besteht darin, welche der n Punkte mit einander verbunden sind. Diese Information wird nun mit Hilfe einer Matrix in $M_{n,n}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ausgedrückt:
Die Matrix enthält nur 0 und 1 als Einträge, und zwar steht an Stelle ij genau dann eine 1, wenn P_i und P_j im Graphen mit einander verbunden sind oder $i = j$ ist.
Wenn nun einige Schalter betätigt werden, so wird dies durch einen Vektor $v \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ dargestellt, wobei v genau dann in der Koordinate i eine 1 hat, wenn der Schalter bei P_i betätigt wird.

a) Geben Sie die Matrix an, welche zu Ihrem Graphen aus Aufgabe 2a) gehört und wenden Sie diese Matrix auf den Vektor $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an. Erläutern Sie, welche Information Ihnen der Ergebnisvektor in Bezug aus die Lampen oder Schalter gibt.

b) Sei $A \in M_{4,4}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.
(ii) Nun sollen zunächst alle Lampen dunkel sein. Welche Schalter müssen betätigt werden, damit anschließend die Lampen P_2, P_3 und P_4 brennen, P_1 jedoch nicht brennt? Lösen Sie diese Aufgabe nicht nur anhand des gezeichneten Graphen, sondern auch direkt mir Hilfe der Matrix A.

c) Beantworten Sie die Fragen von 3b) für die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Erklären Sie, worin sich die Aufgaben wesentlich unterscheiden (bzgl. der Graphen und bzgl. der Matrizen).