M. Kreuzer
A. Fischer

Sommersemester 02

Übungsaufgaben
zur Vorlesung "Lineare Algebra I" für Lehramt

Blatt 6 **Abgabe bis 27.5.02 um 10.00 Uhr**

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi]$.
a) Begründen Sie geometrisch, warum f eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, und stellen Sie die Matrix von f auf (mit Beweis).
b) Zeigen Sie, dass f keine Eigenvektoren besitzt, und folgern Sie, dass f nicht trigonalisierbar ist.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass jede Matrix $M \in Mat_{m,n}(K)$ vom Rang r äquivalent ist zur Matrix $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sei $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung, und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f.
a) Erklären Sie, wie man eine K-Basis von $Eig(f, \lambda)$ effektiv berechnen kann.
b) Finden Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Matrix $M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der durch M gegebenen $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^4$.
b) Zeigen Sie, dass f die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ besitzt, und bestimmen Sie die zugeghörigen Eigenräume.
c) Ergänzen Sie Basen dieser Eigenräume zu einer Basis von $\mathbb{Q}^4$, stellen Sie die Matrix von f bzgl. dieser Basis auf, und berechnen Sie damit $\chi_f(x)$ erneut.

Aufgabe 5

Führen Sie die nachfolgenden Schritte in einer Maple-Sitzung aus, speichern Sie das Resultat als Maple-Worksheet und senden Sie es per e-mail an mich. (astrid.fischer@math.uni-dortmund.de)
a) Starten Sie eine Maple-Sitzung und laden Sie das Paket "Linear Algebra".
b) Definieren Sie die Matrix$M$ aus Aufgabe 4a.
c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von M.
d) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von M und lassen Sie es faktorisieren.
e) Entscheiden Sie mit Hilfe der berechneten Resultate, ob M diagonalisierbar oder trigonalisierbar ist.