M. Kreuzer
A. Fischer

Sommersemester 02

Übungsaufgaben
zur Vorlesung "Lineare Algebra I" für Lehramt

Blatt 8 **Abgabe bis 11.6.02 um 10.00 Uhr**

Aufgabe 1

Sei $\phi : K^2 \times K^2 \longrightarrow K$ die durch $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) = ad - bc$ definierte Abbildung.
a) Zeigen Sie, dass ϕ eine Bilinearform ist.
b) Geben Sie die Gram'sche Matrix von ϕ bzgl. der Standardbasis an.
c) Beweisen Sie, dass ϕ nicht ausgeartet ist.
d) Zeigen Sie, dass $\phi(v, v) = 0$ für alle $v \in K^2$.

Aufgabe 2

Seien $v, w \in K^n$ mit $w \neq 0$. Die Punktemenge $L := \{v + \lambda w \mid \lambda \in K\}$ heißt die Gerade durch v in Richtung w. Ein Vektor $u \in K^n$ heißt orthogonal zu L, wenn für alle $p, q \in L$ gilt $\phi(u, p - q) = 0$. Hierbei sei ϕ das Standardskalarprodukt.
a) Beweisen Sie, dass ein Vektor $u \in K^n$ genau dann zu L orthogonal ist, wenn $u \perp w$ gilt.
b) Zeigen Sie, dass $G := \{(x_1, x_2) \in K^2 \mid ax_1 + bx_2 = c\}$ bei vorgegebenen $a, b, c \in K$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ eine Gerade in K^2 ist, und dass der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden senkrecht steht.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform $\phi : V \times V \longrightarrow K$ in eindeutiger Weise als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform darstellen lässt.

Aufgabe 4

Gegeben seien $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in K^3 \setminus \{0\}$ und die zugehörigen Linearformen $\varphi, \psi : K^3 \longrightarrow K$ mit $\varphi((c_1, c_2, c_3)) := a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3$ und $\psi((c_1, c_2, c_3)) := b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3$.
a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : K^3 \times K^3 \longrightarrow K$ mit $\phi(v, w) := \varphi(v) \cdot \psi(w)$ eine Bilinearform ist.
b) Finden Sie die Gram'sche Matrix von ϕ bzgl. der Standardbasis von K^3.
c) Für welche $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in K^3 \setminus \{0\}$ ist ϕ nicht ausgeartet?